



DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FUNCIONES DE BANDA LIMITADA

JUAN ANTONIO BARCELO VALCARCEL

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA POR
ANTONIO CORDOBA BARBA



FUNCIONES DE BANDA LIMITADA

JUAN ANTONIO BARCELO VALCARCEL

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA POR
ANTONIO CORDOBA BARBA

Reg. B.C. 43409



A mis padres Juan y
Maria de los Remedios.

Quisiera agradecer al profesor Antonio Córdoba la ayuda que me ha prestado durante estos últimos cuatro años, sin la cual no hubiese sido posible la realización de esta memoria.

No puedo olvidar a Francisco Balbrea, quien me inició en este bonito y a veces duro oficio.

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Esta memoria contiene esencialmente un resultado sobre bases de ciertos subespacios de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Las funciones implicadas son las ondas esferoidales prolatas. Hemos pensado, quizás equivocadamente, que el lector puede no estar demasiado familiarizado con estas funciones especiales. Por esta razón la introducción consta de dos partes: la primera describe el papel que representan estas funciones en el caso unidimensional; la segunda comenta los resultados que se presentan en esta memoria.

En teoría de la comunicación se trabaja con un conjunto de funciones reales, llamadas señales y que matemáticamente corresponden al espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Dada una señal $f(t)$, definimos su energía $E(f)$ por:

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$$

La amplitud espectral $F(x)$, es lo que conocemos en matemáticas como su transformada de Fourier:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} dt$$

Debido a la formula de inversión [23]:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{2\pi i x t} dx$$

la señal suele verse como una suma de sinusoides de diferentes frecuencias. La senoide de frecuencia t , a saber $e^{2\pi i t x}$, tiene amplitud $|F(x)|$ y fase $\arg F(x)$.

Hay razones prácticas suficientes para estudiar un conjunto específico de señales, a saber aquellas para las cuales el soporte de su amplitud espectral está contenido en un intervalo finito. Los ingenieros dedicados al campo de la teoría de la comunicación suelen construir aparatos que transforman señales en otras nuevas señales de alguna forma deseada. Estos aparatos (también conocidos como sistemas) están interpretados matemáticamente como operadores $L: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ lineales, continuos y conmutando con translaciones. L vendrá definido, via la transformada de Fourier, por una función $H_L(x)$ de $L^\infty(\mathbb{R})$ llamada, en teoría de la comunicación, función de transferencia del sistema. Las $H_L(x)$ utilizadas por los ingenieros tienden a cero cuando x se hace grande, por lo tanto la amplitud espectral de las respuestas de estos sistemas a señales será insignificamente pequeña mas allá de alguna frecuencia finita. Además, estos aparatos no transmiten sinusoides de frecuencias arbitrariamente altas sin una fuerte atenuación. Por otra parte, el examen de muchas clase na-

turales de señales demuestra que tienen amplitud espectral contenida en un intervalo finito.

Es entonces natural considerar los conjuntos de señales:

$$B(\Omega) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \text{sop } \hat{f} \subset [-\Omega, +\Omega] \}$$

$$D(T) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \text{sop } f \subset [-T/2, +T/2] \}$$

donde Ω y T son números reales positivos.

Si $f \in B(\Omega)$, se dice que f es banda-limitada y que su amplitud espectral está soportada en la banda $[-\Omega, +\Omega]$. Al conjunto $B(\Omega)$ se le conoce como el conjunto de señales banda-limitadas a la banda $[-\Omega, +\Omega]$.

Si $f \in D(T)$, se dice que f es tiempo-limitada y la señal está concentrada al periodo $[-T/2, +T/2]$. Al conjunto $D(T)$ se le conoce como el conjunto de señales tiempo-limitadas al periodo $[-T/2, +T/2]$.

Si $f \in B(\Omega)$

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(x) e^{2\pi i x t} dx$$

f es una función extremadamente suave, de hecho, por el teorema de Paley-Wiener [26] f puede ser extendida a una función analítica en el campo complejo. Es claro que una tal señal no puede anularse en ningún intervalo de la recta real, por lo tanto no puede tener un comienzo ni un fin. En la práctica los ingenieros trabajan con señales de $D(T)$, en el sentido que las entienden con un comienzo y un fin. En teoría de la comunicación este dilema se ha intentado resolver buscando, en algún sentido, señales que estén "concentradas" en el tiempo y en la frecuencia. Hay distintas maneras matemáticamente de ver la imposibilidad del confinamiento simultáneo de una señal y su amplitud espectral, quizás la más familiar sea el principio de incertidumbre de Heisenberg [8]. Si medimos la

concentración de una señal y su amplitud espectral α , β por:

$$\alpha^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t-t_0|^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad \beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x-x_0|^2 |\hat{f}(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx}$$

cualquiera que sea t_0 y x_0 , $\alpha\beta > (1/4\pi)^2$ y α y β no podrían ser simultáneamente pequeños.

La anterior formulación responde a conceptos de mecánica cuántica y tiene poco significado físico en teoría de la comunicación. Es más natural en este campo medir la concentración de una señal y su amplitud espectral por:

$$(0.1) \quad \alpha^2(T) = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad \beta^2(\Omega) = \frac{\int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{f}(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx}$$

es decir, en términos de la fracción de energía de una señal (su amplitud espectral) en un tiempo (banda) dado. En términos de estos cocientes, Landau y Pollak [11] plantean un principio de incertidumbre más adecuado en el campo de la teoría de la comunicación y que posteriormente comentaremos.

Slepian y Pollak en [18] se plantean un problema más débil pero quizás más natural que el principio de incertidumbre. ¿Cuál es la máxima concentración de energía que puede alcanzar una señal banda-limitada a la banda $[-\Omega, +\Omega]$ en un periodo de tiempo $[-T/2, +T/2]$? ¿Existe alguna señal $f \in B(\Omega)$ que alcanza este máximo?.

El problema de hallar el máximo de $\alpha^2(T)$ cuando $\beta^2(\Omega)=1$, puede reformularse en un problema espectral, a saber: hallar el primer autovalor, y su autofunción asociada, del operador:

$$P: B(\Omega) \longrightarrow B(\Omega)$$

$$f \longrightarrow Pf(x) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin 2\pi\Omega(x-t)}{\pi(x-t)} f(t) dt$$

La teoría estandar [16] asegura la existencia de un conjunto numerable de funciones reales $b_0(x), b_1(x), \dots$ y un conjunto de números reales positivos

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots \text{ decreciendo a cero}$$

con las siguientes propiedades:

- i) Las $b_n(x)$ son banda-limitadas, ortonormales en la recta real y completas en $B(\Omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_n(x) b_m(x) dx = \delta_{nm}$$

- ii) En el intervalo $[-T/2, T/2]$ las $b_n(x)$ son ortogonales y completas en $L^2[-T/2, +T/2]$

$$\int_{-T/2}^{T/2} b_n(x) b_m(x) dx = \lambda_n \delta_{nm}$$

- iii) Para cualquier valor real o complejo x

$$\lambda_n b_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\Omega(x-t)}{\pi(x-t)} b_n(t) dt$$

La respuesta al problema acabado de plantear la dará la señal $b_0(t)$ y el número real λ_0 , esto es: entre todas las señales de $B(\Omega)$, $b_0(t)$ es la de mayor concentración en $[-T/2, +T/2]$ y su concentración es λ_0 . Sigue también de la teoría estandar que la señal $b_n(t)$, cuya concentración en $[-T/2, +T/2]$ es λ_n , es la señal más concentrada en $[-T/2, +T/2]$ que es ortogonal a $b_0(t), b_1(t), \dots, b_{n-1}(t)$.

El éxito del trabajo de Slepian y Pollak consiste en detectar quienes son las funciones $b_n(x)$. Observan que las autofunciones del problema de Sturm-Liouville:

$$(0.2) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + (x - c^2x^2)y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad c = \pi\Omega T$$

con condiciones de frontera tales que las soluciones sean finitas o continuas en los puntos extremos, coinciden con las autofunciones de P cuando este ha

sido normalizado al rango de integración $[-1, +1]$. De esto obtienen una importante conclusión: los autovalores (y por lo tanto la máxima concentración) y las autofunciones de P dependen del producto de Ω y T , es decir de $c = \pi\Omega T$.

La ecuación (0.2) ha sido estudiada con bastante detalle, vease referencias [9] y [24]. En el estudio de algunos problemas físicos interviene la ecuación de ondas en ciertos dominios particulares. De las propiedades geométricas de estos dominios depende la elección del sistema de coordenadas a utilizar. En el estudio de la ecuación de ondas tridimensional por el método de separación de variables y utilizando un sistema de coordenadas esferoidal prolato, aparece el problema (0.2). A las soluciones de (0.2) se las conoce en la literatura como las ondas esferoidales prolatas. Las $b_n(t)$ $n=0,1,\dots$ heredan el mismo nombre.

Las gráficas que presentamos a continuación, que han sido tomadas de [18], muestran la conducta de $b_0(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$ para distintos valores de c . (Los autores en [18] designan a las ondas esferoidales prolatas por $\phi_n(t)$ y no incluyen el factor 2π en la definición de la transformada de Fourier).

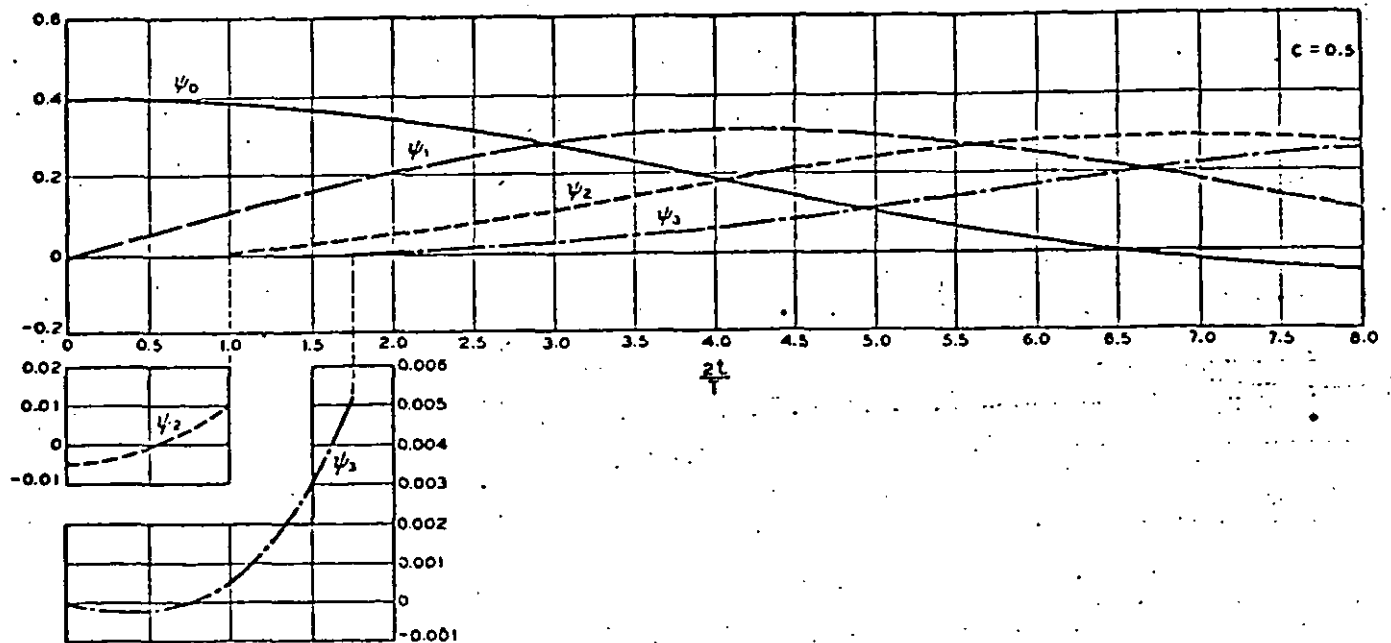


Fig. 1 — $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ vs. $2t/T$ for $c = 0.5$.

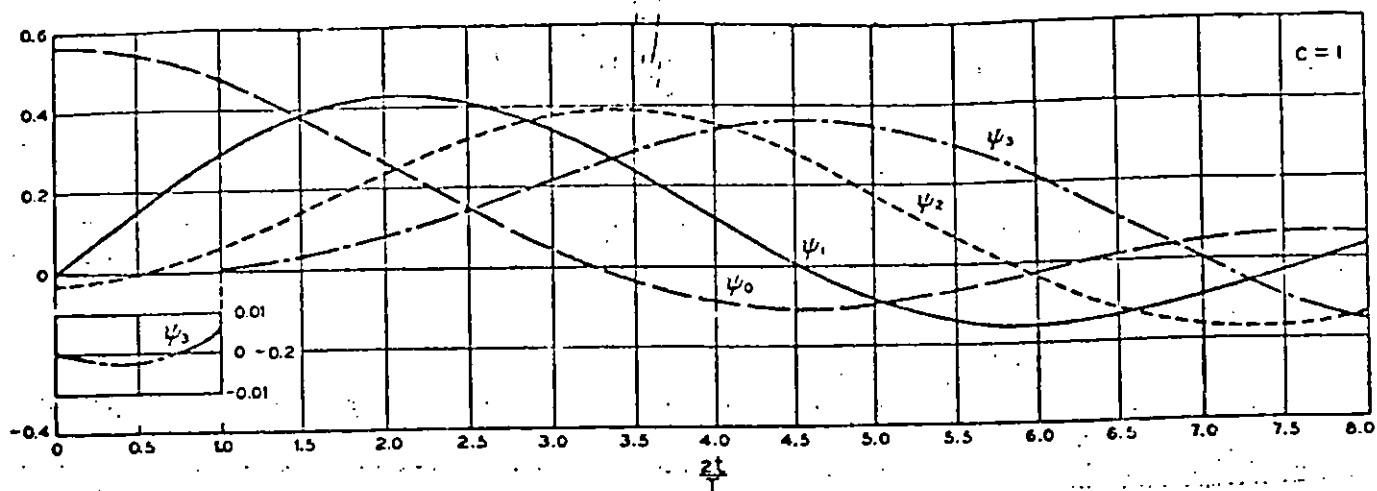


Fig. 2 — $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ vs. $2l/T$ for $c = 1.0$.

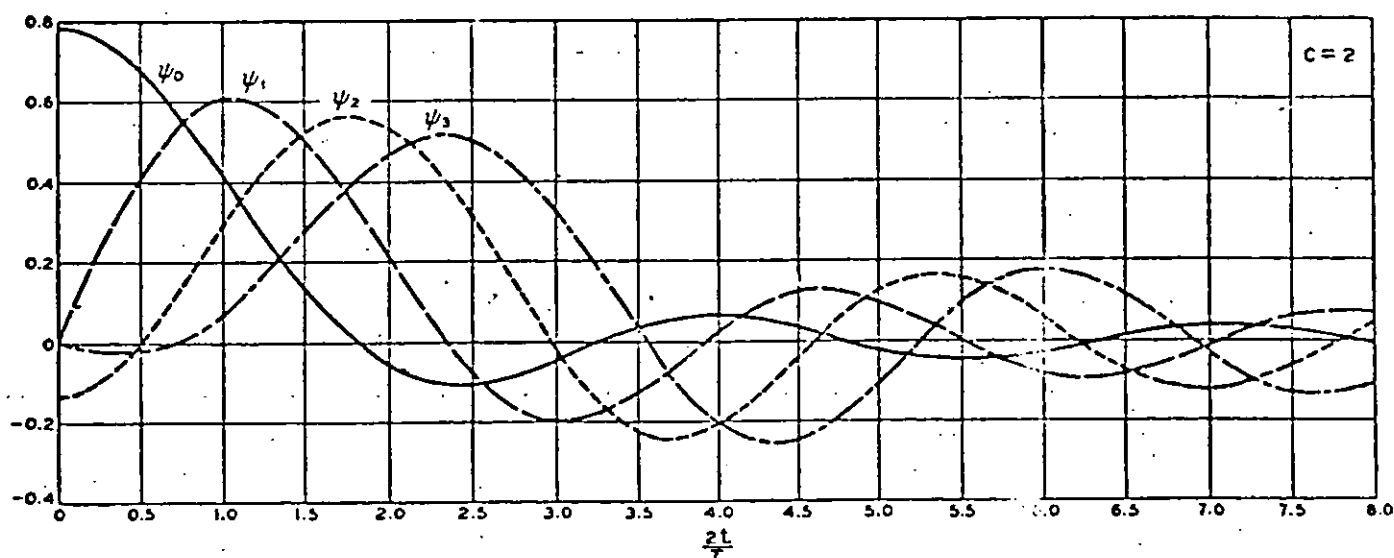


Fig. 3 — $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ vs. $2l/T$ for $c = 2.0$.

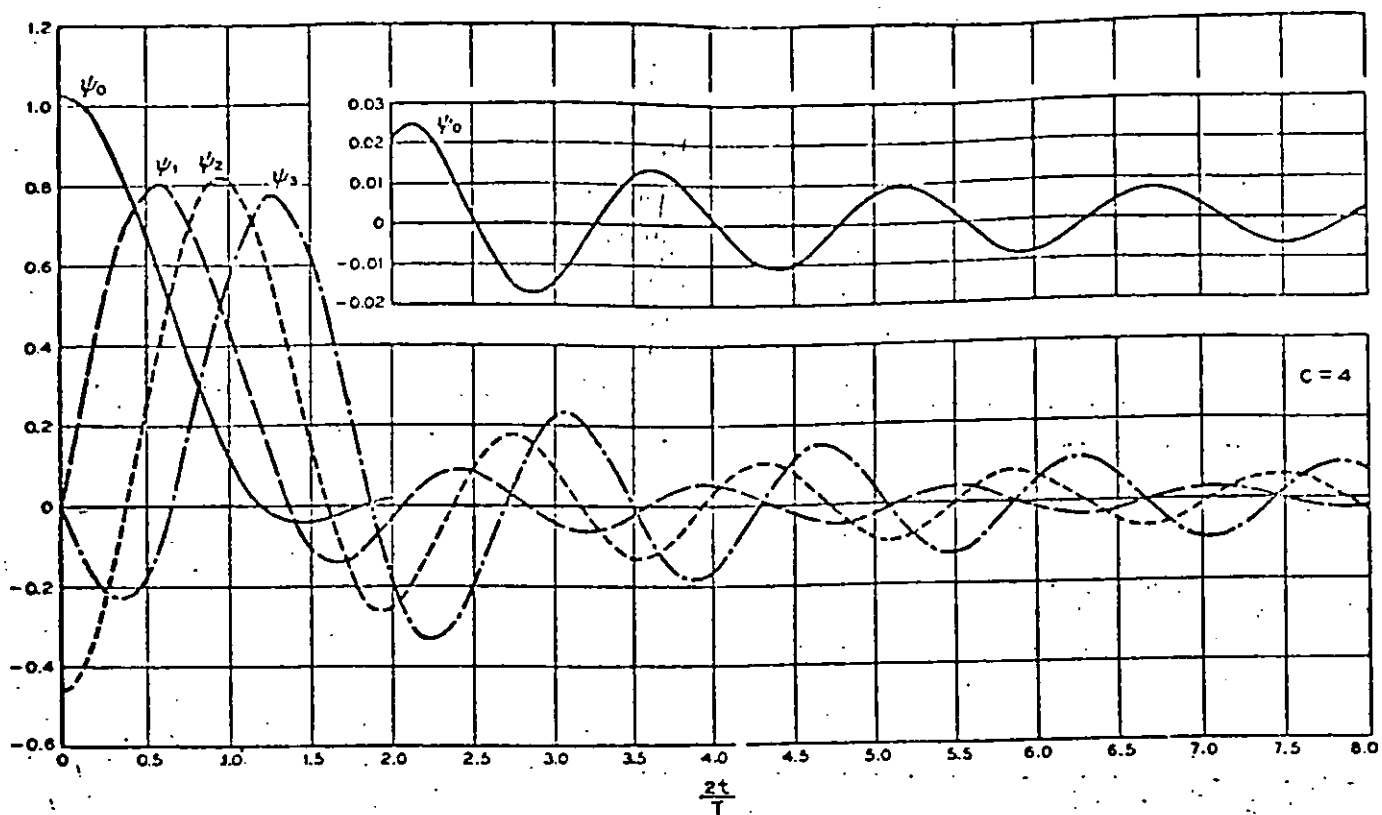


Fig. 4 — $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ vs. $2t/T$ for $c = 4.0$.

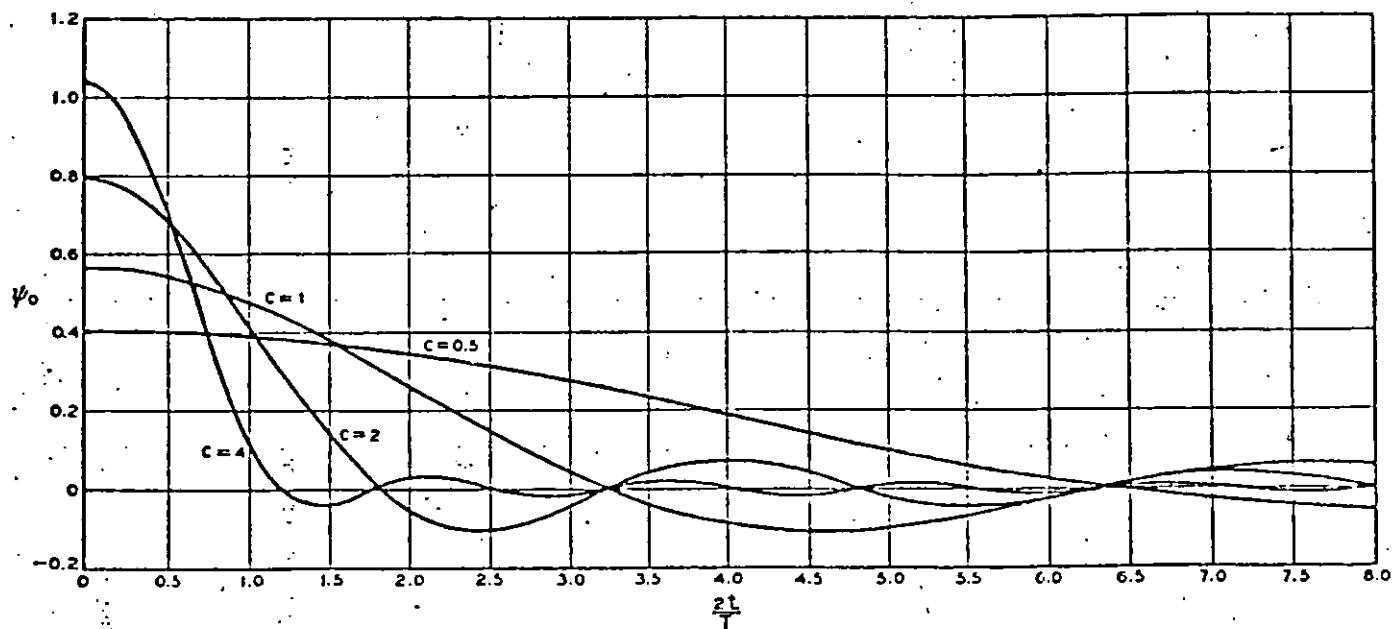


Fig. 5 — $\psi_0(c, t)$ vs. $2t/T$ for $c = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$.

Parece ser que durante algun tiempo, la función

$$f(t) = \Omega T \frac{\text{sen } 2\pi \Omega t}{t}$$

habia sido intuitivamente considerada como la señal de $B(\Omega)$ más concentrada en el periodo de tiempo $[-T/2, +T/2]$. La siguiente gráfica, que hemos tomado de [11], compara el valor de la concentración de $b_0(t)$ (λ_0 , línea no continua) y $f(t)$ (línea continua) en $[-T/2, +T/2]$. (Otra vez tenemos que tener en cuenta el factor 2π).

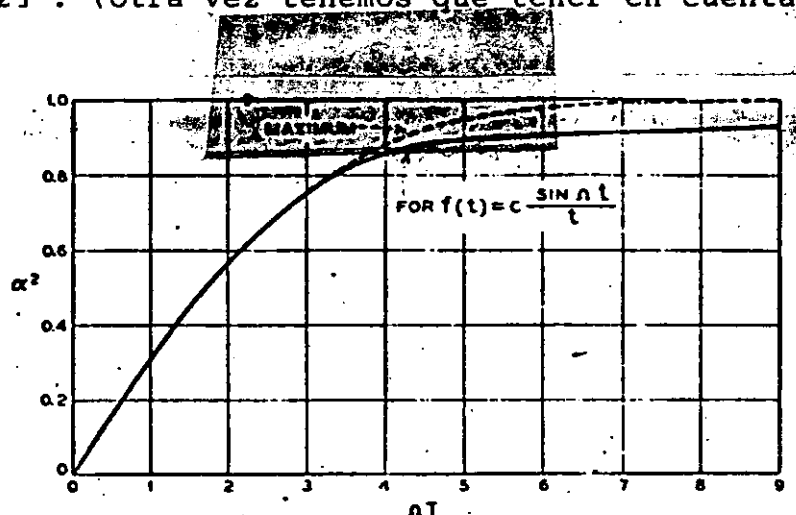


Fig. 2 — Possible α^2 if $\beta^2 = 1$.

$\lambda_0 = \lambda_0(c)$ crece exponencialmente a 1 cuando $c \rightarrow \infty$. Cuando c es pequeño, la diferencia de concentración de las señales $b_0(t)$ y $f(t)$ es inapreciable. La diferencia se observa cuando c se hace grande.

La curiosa propiedad matemática de la doble ortogonalidad de las $b_n(t)$ sobre la línea real y sobre el intervalo $[-T/2, +T/2]$, nos permite determinar una señal banda-limitada solamente conociéndola en $[-T/2, +T/2]$. Es claro que esto se puede hacer, pues cualquier función banda-limitada es una función entera y queda, por tanto, determinada por su serie de Taylor en cualquier punto. En la práctica, tendríamos que truncar la serie de Taylor y la aproximación polinómica no sería óptima en toda la recta real. Además

esta aproximación no sería banda-limitada.

Si $f \in B(\Omega)$, por i)

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n b_n(x)$$

(entendiendo la convergencia en la L^2 -norma). Por ii)

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) b_n(t) dt$$

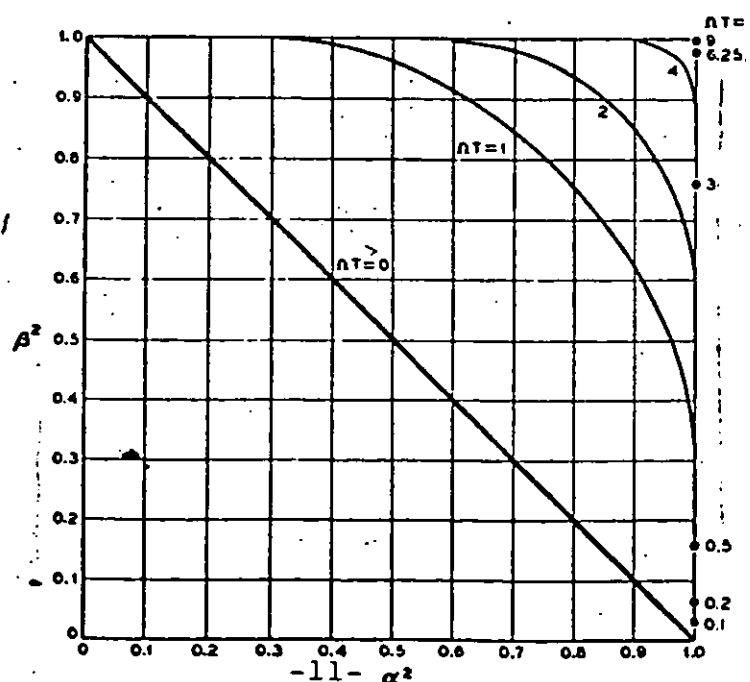
lo cual implica el conocimiento de f solamente en $[-T/2, +T/2]$. Además cualquier aproximación de f por series finitas de la forma $\sum_{0 < n < N} a_n b_n(x)$ es banda-limitada y óptima (dependiendo de lo grande que sea N) en la recta real.

El principio de incertidumbre de Landau y Pollak determina la región del cuadrado unidad que describe el par $(\alpha^2(T), \beta^2(\Omega))$ (0.1). Demuestran que esta región este demarcada por:

$$\cos^{-1} \alpha(T) + \cos^{-1} \beta(\Omega) \geq \cos^{-1} \sqrt{\lambda_0}$$

con la precaución de que si $\alpha(T)$ o $\beta(\Omega) = 0$ ($=1$) el otro debe ser >1 (<0).

La siguiente gráfica, que describe esta región y ha sido tomada de [11], manifiesta de manera clara la imposibilidad del confinamiento simultaneo de una señal y su amplitud espectral.



Un resultado importante donde las $b_n(t)$ desempeñan un destacado papel es el teorema de la dimensión. Este teorema afirma a groso modo, que las funciones banda-limitadas a $[-\Omega, +\Omega]$ y "concentradas" en $[-T/2, +T/2]$ tiene dimensión $2\Omega T$. En realidad esa afirmación hay que precisarla para que resulte matemáticamente correcta.

Existen distintas razones que conducen a considerar este problema. Quizás la principal venga del hecho de que una función banda-limitada puede ser expresada en términos de los valores de la función en un conjunto discreto de puntos de la recta real igualmente distribuidos, esto es: si $f \in B(\Omega)$ entonces

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \frac{\sin 2\pi\Omega\left(x - \frac{n}{2\Omega}\right)}{\pi\left(x - \frac{n}{2\Omega}\right)}$$

Esta igualdad es conocida como la "formula muestra" para las funciones banda-limitadas, y sugiere (en la práctica) que si f es "nula" (pequeña) para $|t| < T/2$, podemos tomar solamente los $2\Omega T + 1 \approx 2\Omega T$ términos que cuentan en la serie.

Muchos trabajos en la literatura matemática y de la teoría de la comunicación se han dedicado a este importante problema. Entre ellos, por lo que a nosotros concierne, destacamos los trabajos de Landau y Pollak [12] y Slepian [20]. A nuestro entender, el trabajo de Slepian es bastante mas fino que el de Landau y Pollak, en el sentido que en su filosofía pretende ajustarse más a la realidad.

Landau y Pollak redefinen el concepto de señal tiempo-limitada con objeto de ajustar esta noción al mundo real y que no presente una contradicción con el hecho de ser tambien banda-limitada. Una señal $f(t)$ será tiempo-limitada, dependiendo de un error ϵ , si

$$\int_{|t| > T/2} |f(t)|^2 dt = \epsilon^2$$

Definen el conjunto:

$$E(T, \epsilon) = \{ f \in B(\Omega) \mid \|f\|_2 = 1 \text{ y } \int_{|t| > T/2} |f(t)|^2 dt = \epsilon^2 \}$$

y demuestran que tiene "dimensión aproximada" $[2\Omega T] + 1$, en el sentido que existen $[2\Omega T] + 1$ señales $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{[2\Omega T]}$ cuyas combinaciones lineales aproximan cada f de $E(T, \epsilon)$ con un error prefijado.

El mínimo de $\max_{f \in E(T, \epsilon)} \|f - \sum_{k=0}^N \langle \phi_k, f \rangle \phi_k\|_2$ es alcanzado para

$\phi_0 = b_0, \phi_1 = b_1, \dots, \phi_N = b_N$ cualquiera que sea $N \geq 0$. Para $N = [2\Omega T]$

$$\max_{f \in E(T, \epsilon)} \|f - \sum_{k=0}^{[2\Omega T]} \langle f, b_k \rangle b_k\|_2 \leq C \epsilon^2$$

donde C es una constante absoluta y puede ser tomada como 12. Surge la pregunta natural: ¿es posible bajar la constante C hasta 1? La respuesta es negativa (vease teorema 5 de [12]) si mantenemos solamente $[2\Omega T] + 1$ señales $b_n(t)$, pero podemos aproximar C tanto como queramos a 1 ($C = 1 + \nu$, $\nu > 0$) si tomamos $[2\Omega T] + C_1 \log^+[2\Omega T] + C_2$ señales $b_n(t)$ (C_1 y C_2 dependen de ν).

Slepian redefine tanto el concepto de señal tiempo-limitada como banda-limitada. Partiendo de la mínima cantidad de energía que puede ser medida en un laboratorio ϵ , define:

- $f(t)$ es tiempo-limitada al periodo $[-T/2, +T/2]$ con un error ϵ si $\int_{|t| > T/2} |f(t)|^2 dt < \epsilon$. El menor T_0 verificando la anterior propiedad se conoce como la duración de f .

- $f(t)$ es banda-limitada a $[-\Omega, +\Omega]$ con un error ϵ si $\int_{|x| > \Omega} |\hat{f}(x)|^2 dx < \epsilon$. El menor Ω_0 verificando la anterior propiedad se conoce como la anchura de banda de f .

Con estas nuevas definiciones, cualquier señal es tiempo-limitada y banda-limitada para algun T y Ω apropiado.

Dado un conjunto de señales S , entiende que su "dimensión aproximada" es N con un error ϵ en $[-T/2, +T/2]$ si existen N señales $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}$ tal que

$$\int_{|t| > T/2} \left| f(t) - \sum_{i=0}^{N-1} a_i \phi_i(t) \right|^2 dt < \epsilon$$

y no hay $N-1$ señales que verifiquen tal propiedad.

Siendo F el conjunto de señales tiempo-limitadas a $[-T/2, +T/2]$ con un error ϵ y banda-limitadas a $[-\Omega, +\Omega]$ con un error ϵ' y $N(\Omega, T, \epsilon, \epsilon')$ su dimensión aproximada con un error ϵ' en $[-T/2, +T/2]$, demuestra que se $\epsilon' > \epsilon$ entonces:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(\Omega, T, \epsilon, \epsilon')}{T} = 2\Omega$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{N(\Omega, T, \epsilon, \epsilon')}{\Omega} = 2T$$

lo cual confirma que la dimensión del conjunto de señales tiempo-limitadas y banda-limitadas es asintóticamente $2\Omega T$ cuando T o Ω resultan grandes.

La hipótesis $\epsilon' > \epsilon$, como en el caso anterior, es esencial. La demostración de este resultado descansa totalmente en las propiedades de las funciones $b_n(x)$.

Las funciones $b_n(x)$, han tenido importantes aplicaciones en teoría de la comunicación (teoría de filtros, transmisión de datos, teoría de antenas, ...) desde que fueron definidas. Referimos al esplendido artículo de recopilación de Slepian [21], donde analiza el papel desempeñado por las $b_n(x)$ y da unas referencias bastante completas sobre estas funciones.

Lo anterior sugiere una primera pregunta natural: ¿es posible definir en \mathbb{R}^n unas funciones con análogas propiedades a las $b_n(x)$ en \mathbb{R} ? Es Slepian quien primeramente se plantea esta cuestión en [19]. Partiendo de dos conjuntos de \mathbb{R}^n , R y S , define los espacios:

$$B(R) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } \hat{f} \subset R \}$$

$$D(S) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } f \subset S \}$$

y como en el caso unidimensional pretende maximizar el cociente:

$$(0.3) \quad \frac{\int_S |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 dt}$$

sobre todas las funciones de $B(R)$.

Sin ninguna restricción en los conjuntos R y S , encuentra que el máximo de (0.3) y la función $f \in B(R)$ para la cual se alcanza este máximo, deben corresponder al primer autovalor y su autofunción asociada del operador $E_0 D$ estudiado en $B(R)$, donde B y D son las proyecciones:

$$B: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B(R)$$

$$f \longrightarrow Bf(x) = \int_R \hat{f}(\xi) e^{2\xi i x} d\xi$$

$$D: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(S)$$

$$f \longrightarrow Df(x) = f(x) \chi_S(x)$$

Es claro que el intentar aplicar la teoría estandar al operador $B_0 D$ implica algunas restricciones de caracter geométrico en los conjuntos R y S . Así lo hace notar Slepian y resuelve el problema con R simétrico ($x \in R$ si y solamente si $-x \in R$) y siendo S una homotecia de R ($S = cR$ $c > 0$). Obtiene un conjunto de funciones $b_n(x)$ y números reales positivos λ_n , con las siguientes propieda-

des:

- (0.4) Las $b_n(x)$ son banda-limitadas (pertenecen a $B(R)$) y forman un sistema ortonormal completo en $B(R)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_n(x) b_m(x) dx = \delta_{nm}$$

- (0.5) Las restricciones de las $b_n(x)$ a S forman un sistema ortonormal completo en $L^2(S)$.

$$\int_S b_n(x) b_m(x) dx = \lambda_n \delta_{nm}$$

- (0.6) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda_n b_n(x) = \int_S \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) b_n(y) dy$$

Esta última propiedad nos dice que las $b_n(x)$ son esencialmente las autofunciones de la transformada de Fourier finita sobre R , es decir del problema:

$$(0.7) \quad Lf(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i c x y} f(y) dy = \lambda f(x)$$

Aunque el resultado de Slepian es general, no es satisfactorio en el sentido que solamente garantiza la existencia de las funciones pero no da ninguna información sobre ellas. No obstante, para ciertos subconjuntos $R \subset \mathbb{R}^n$ la teoría si es satisfactoria. El más sencillo es cuando R es el rectángulo de \mathbb{R}^2 (la generalización a \mathbb{R}^n es inmediata):

$$R = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x_1 \leq a \quad -b \leq x_2 \leq b \}$$

y $S = cR$ $c > 0$. Si $b_n^1(x_1)$ $n=0,1,\dots$ (resp. $b_m(x_2)$ $m=0,1,\dots$) son las ondas esferoidales prolatas asociadas a los conjuntos $[-a,+a]$ en la frecuencia y $[-cb,+ca]$ en el tiempo (resp. $[-b,+b]$, $[-cb,+cb]$)

y λ_n^1 $n=0,1,\dots$ (resp. λ_m^2 $m=0,1,\dots$) son las concentraciones de las $b_n^1(x_1)$ (resp. $b_m^2(x_2)$) en $[-ca,+ca]$ ($[-cb,+cb]$), las soluciones del problema espectral $\lambda f = B_0 Df$ en $B(R)$ está dada por la familia:

$$\lambda_{nm} = \lambda_n^1 \lambda_m^2$$

$$b_{nm}(x_1, x_2) = b_n^1(x_1) b_m^2(x_2)$$

Un caso que tiene mayor interes y que será el que nos ocupe a nosotros a lo largo de esta memoria, es $R=B(0,1)$ y $S=B(0,c)$ $c>0$ (bolas de \mathbb{R}^n centradas en el origen y de radios 1 y c respectivamente). Este caso fue resuelto por Slepian en [19] con éxito. Nosotros lo desarrollamos con detalle en la primera sección del capítulo I.

Como en el caso unidimensional, el éxito radica en reducir el estudio de las autofunciones del problema espectral al estudio de las autofunciones de un cierto problema de Sturm-Liouville. El hecho de que el operador L ((0.7)) sea una transformada de Fourier y el conocimiento del comportamiento de esta sobre funciones de la forma $Y_N(x')f(r)$, donde $Y_N(x')$ es un armónico esferico superficial de grado N y f es una funcion radial, sugiere que utilicemos la descomposición via los armónicos esféricos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ y reduzcamos el estudio de (0.7) a una familia numerable de problemas unidimensionales. Esto es: para cada $N=0,1,2,\dots$ fijo, sea $\{Y_{Nl}\}$ $l \in \{1,2,\dots,a_N\}$ una base ortonormal (en $L^2(S^{n-1})$) del conjunto de los armónicos esféricos superficiales de grado N , entonces (0.7) es equivalente (salvo el factor angular) a la familia de problemas unidimensionales:

$$(0.8) \quad \gamma_N \phi_N(r) = \int_0^1 J_{N+(n-2)/2}(2\pi crs) \sqrt{2\pi crs} \phi_N(s) ds \quad N=0,1,2,\dots$$

donde $J_\nu(x)$ designa la función de Bessel de orden ν .

Para cada N fijo, las soluciones de (0.8) coinciden en $[0,1]$ con las autofunciones del problema de Sturm-Liouville :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\frac{1}{4} - (N + \frac{n-2}{2}) \frac{1}{x^2} - 4x^2c^2 + x_N(c) \right) y = 0$$

y las soluciones del problema original, que seguiremos llamando ondas esféricas prolatas en R^n , están definidas por :

$$b_{N,1k}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{d^N(k,j)}{u_{Nk}} h_{N,1k,j}(x) \quad \begin{array}{l} N=0,1,2,\dots \\ 1 \in \{1,2,\dots,a_N\} \\ k=0,1,2,\dots \end{array}$$

donde

$$h_{N,1k}(x) = \sqrt{(n/2)+N+2k} Y_{N1}(x') \frac{J_{(n/2)+N+2k}(2x|x|)}{|x|^{(n/2)}}$$

siendo $x=x'|x|$ $x' \in S^{n-1} = \{x \in R^n / |x|=1\}$

Los coeficientes $d^N(k,j)$ tienen un fuerte decaimiento en N,k y j (1 sección capítulo I). De esto deducimos que el término que más pesa en la serie que define la $b_{N,1k}$ es el correspondiente a $j=0$ y esto hace, por lo menos cuando k es grande, que $b_{N,1k}$ sea vista esencialmente como la función $h_{N,1k}$.

Las funciones $h_{N,1k}$ tienen propiedades similares a las $b_{N,1k}$. Son funciones banda-limitadas y forman y forman un sistema ortonormal completo en este conjunto.

Si $f \in L^2(R^n)$ es banda-limitada, por (0.4):

$$(0.9) \quad f(x) = \sum \langle f, b_{N,1k} \rangle b_{N,1k}(x)$$

entendiendo esta convergencia en la L^2 -norma. Surge una pregunta natural, si $f \in L^2(R^n) \cap L^p(R^n)$ y f es banda-limitada, ¿es cierto (0.9) en la L^p -norma?, ¿que interés ofrece esta cuestión?.

Es natural dar una extensión a $L^p(R^n)$ de las funciones banda-

limitadas, así definimos:

$$B_p(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \text{sop } \hat{f} \subset B(0,1) \}$$

$B_p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con la topología inducida por $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si (0.9) fuese cierto en la L^p -norma, esto nos diría que la familia $\{b_{N,k}\}$ es una base en el espacio $B_p(\mathbb{R}^n)$. Es conocido el interés de resultados de este tipo. El problema de determinar si un conjunto de funciones forma una base en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (o en un subespacio de este) ha sido tratado con frecuencia. El resultado más familiar y el primero que se trató, es el teorema de Marcel Riesz el cual asegura que el conjunto de funciones e^{inx} $n \in \mathbb{Z}$ forma una base en $L^p[0,2]$ $p > 1$. La extensión de este resultado a la esfera S^{n-1} , fue tratada por Bonami y Clerc [5] para los armónicos esféricos superficiales, obteniendo resultado positivo solamente para $p=2$ ($n > 2$). Del trabajo de Bonami y Clerc se desprende una íntima relación entre su resultado y el multiplicador de la bola unidad. De especial interés han sido los casos en los que las funciones candidatas son las soluciones de algún problema de Sturm-Liouville y principalmente cuando estas son polinomios ([13], [14], [15], [2])

Las funciones $b_{N,k}$ tienen una importante propiedad, su transformada de Fourier está soportada en la bola unidad. Si estas funciones representasen (en el sentido de (0.9)) a cada función de $B_p(\mathbb{R}^n)$, ¿qué relación existiría entre este resultado y el multiplicador de la bola unidad?

El multiplicador de la bola unidad, es un operador T que viene definido vía la transformada de Fourier por

$$(Tf)^\wedge(x) = \hat{f}(x) \chi_{B(0,1)}(x)$$

Tf es una función banda-limitada y con cierta suavidad en f

$$\langle Tf, b_{N,k} \rangle = \langle f, b_{N,k} \rangle \quad y$$

$$Tf(x) = \sum \langle f, b_{Nlk} \rangle b_{Nlk}(x)$$

Esta representación nos sugirió que podría existir un acercamiento al entendimiento de resultado de Fefferman, via las b_{Nlk} , que T esta acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $n \geq 2$ si y solamente si $p=2$. Esta fue la razón que nos movió a leer los trabajos de Landau, Pollak y Slepian.

Motivados por como son obtenidas las b_{Nlk} (lo cual depende directamente de la descomposición de $L^2(\mathbb{R}^n)$ via los armónicos esféricos), empezamos preguntandonos el problema de la representación (en el sentido de (0.9)) para funciones de $C_p^N(\mathbb{R}^n) = B_p(\mathbb{R}^n) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$, donde $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ es el subespacio de $L^p(\mathbb{R}^n)$ formado por las combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $Y_N(x')f(r)$, siendo $Y_N(x')$ un armónico esférico superficial de grado N y f radial.

Es natural, despues de la representación de las b_{Nlk} via las h_{Nlk} , empezar preguntandonos que ocurre con estas. El rango permitido de p 's es $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$, pues $h_{Nlk} \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $p > \frac{2n}{n+1}$ (3 sección, capítulo I). Las tecnicas a seguir son las estandar, a saber: demostrar que las combinaciones lineales finitas de las h_{Nlk} $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, 2, \dots$ son densas en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$, y que los operadores sumas parciales asociados a estas funciones estan uniformemente acotados en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$. Normalmente, la primera parte es la facil y el trabajo esta en la segunda.

Sin perdida de generalidad podemos trabajar con funciones de la forma $Y_{Nl}(x')f(r)$ con $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ fijo. Si $x=rx'$ $|x|=r$ $x' \in S^{n-1}$ y S_M designa el M -esimo operador suma parcial:

$$\begin{aligned} S_M(Y_{Nl}(x')f(r)) &= \sum_{k=0}^M \langle Y_{Nl}f, h_{Nlk} \rangle h_{Nlk}(x) = \\ &= Y_{Nl}(x') r^{-n/2} \int_0^\infty K_M(r,s) s^{(n/2)-1} f(s) ds \end{aligned}$$

donde:

$$K_M(r,s) = \sum_{k=0}^M (N+(n/2)+2k) J_{N+(n/2)+2k}^{(2;r)} J_{N+(n/2)+2k}^{(2;s)}$$

Si llamamos $v = N+(n/2)+2k$ y como en el caso de los polinomios ortogonales utilizamos la relación entre J_{v-1} , J_v y J_{v+1} , obtenemos una expresión para $K_M(r,s)$ en terminos de J_v y la diferencia $(J_v - J_{v+1})$. Pollard[15] al tratar el problema de si los polinomios de Legendre $p_n(x)$ forman una base en $L^p[-1,+1]$, observa que la diferencia $(p_n(x)-p_{n+2}(x))$ se comporta mejor que $(p_n(x)-p_{n+1}(x))$ y expresa el núcleo $D_n(x,y)$ asociado al n -esimo operador suma parcial en función de la primera diferencia utilizando la igualdad:

$$D_n(x,y) + D_{n+1}(x,y) = 2D_n(x,y) + (2n+3)p_{n+1}(x)p_{n+1}(y)$$

Este argumento ha sido clave para tratar con éxito los operadores sumas parciales asociados a ciertas funciones especiales. Por ejemplo en [2], Askey y Wainger utilizan la idea de Pollard al tratar el problema de la convergencia para los polinomios de Laguerre y Hermite. En nuestro caso, la diferencia $J_v - J_{v+2}$ es J'_{v+1} y la derivada de la función de Bessel tiene un mejor comportamiento que esta (sección 2, capítulo I). Utilizando la idea de Pollard expresamos $K_M(r,s)$ en terminos de dos tipos de núcleos:

$$K_v^1(r,s) = \frac{rs}{r-s} J'_v(r) J_v(s) \quad K_v^2(r,s) = \frac{rs}{r+s} J'_v(r) J_v(s)$$

y sus duales.

En los lemas 2.3 y 2.4 demostramos que los operadores asociados a $K_v^1(r,s)$ y $K_v^2(r,s)$ están uniformemente acotados con respecto a v en el rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$. Este es un resultado más fuerte que la acotación uniforme de S_M con respecto a M . Hay un fenómeno que nos sorprendió en la demostración de estos resultados, no utilizamos para nada el hecho de que el soporte de la transformada de Fourier estuviese contenido en la bola unidad,

y la acotación de los S_M la obtenemos sobre los espacios $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$. Sobre esta importante observación volveremos después.

Vamos a comentar los inconvenientes que hay al intentar aplicar las técnicas estándar al estudio de los núcleos $K_v^1(r,s)$ y $K_v^2(r,s)$, con objeto de justificar la sección 2 del capítulo I, que es donde se presenta la herramienta clave utilizada en los principales resultados de esta memoria. Esencialmente el trabajo está en el $K_v^1(r,s)$ y el problema quedaría reducido a estudiar una desigualdad del tipo:

$$(0.10) \quad \int_0^\infty r^{(n-1)+p(1-n/2)} |J_v(r)|^p |H(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{(0,\infty)}(s)(r))|^p dr \leq \\ \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr$$

siendo H la transformada de Hilbert y A una constante independiente de v .

Una desigualdad del tipo anterior, sugiere la utilización de desigualdades con peso para la transformada de Hilbert. Sabemos que $|J_v'(r)| \leq A r^{-1/2}$, A constante absoluta y $r \in (0, \infty)$ (sección 2, capítulo I). $r^{(n-1)+p(1-n/2)} |J_v'(r)|^p \leq A r^{(n-1)(1-p/2)}$ y $r^{(n-1)(1-p/2)}$ está en la clase A_p (vease capítulo 2 o [10]) si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$. Si trabajamos en este rango de p 's, la expresión a la izquierda de (0.10) es mayorada por:

$$A \int_0^\infty (r^{1/2} |J_v(r)|)^p r^{n-1} |f(r)|^p dr$$

sin embargo, esto no nos permite obtener (0.10), pues $r^{1/2} |J_v(r)|$ no está acotado independiente de v . La mejor cota uniforme en $(0, \infty)$ es del orden de $v^{1/6}$ (sección 2, capítulo I).

Este razonamiento no nos conduce a (0.10) pues hemos querido mayorar uniformemente $J_v(r)$ y $J_v'(r)$ en $(0, \infty)$. En sección 2 del capítulo I, estudiamos el comportamiento de estas funciones en $(0, \infty)$. Este es como $r^{-1/2}$ salvo en la región crítica, es decir cuando x

es de orden de ν . En las regiones donde ambas funciones se comportan como $r^{-1/2}$, por ejemplo $(0, \nu/2) \cup (2\nu, \infty)$, es aplicable un razonamiento como el anterior. Cuando $x \approx \nu$, el crecimiento (con respecto a ν) que experimenta $J_\nu(r)$ es cancelado por el decaimiento de $J'_\nu(r)$. Este hecho nos permitirá obtener (0.10) en la región donde $x \approx \nu$. (En lema 2.4, antes de su demostración, damos una idea de como hacer esto).

Para comprobar que las combinaciones lineales finitas de las $h_{N,k}$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ son densas en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$, queríamos seguir las técnicas estándar. Sabemos que estas funciones son un sistema ortonormal completo en $C_2^N(\mathbb{R}^n)$ y que este se incluye continuamente en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si $p > 2$ (sección 3, capítulo I). El resultado es entonces obvio para $p > 2$. Lo usual, después de esto, es demostrar que el dual de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ es $C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ y deducir el resultado en el rango de p 's menor que 2 para cuyos conjugados tengamos demostrado la acotación uniforme de los operadores sumas parciales.

Si entendemos que el dual de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ es $C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ en el sentido estándar, esto es: dado $F \in (C_p^N(\mathbb{R}^n))'$ existe una única $g \in C_q^N(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(f) = \langle f, g \rangle$ para cada f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y

$$A_1 \|g\|_q \leq \|F\|_{(C_p^N(\mathbb{R}^n))'} \leq A_2 \|g\|_q$$

con A_1 y A_2 constantes absolutas, entonces $(C_p^N(\mathbb{R}^n))' = C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ es equivalente a que el multiplicador de la bola unidad este acotado en $\eta_q^N(\mathbb{R}^n)$ (sección 3, capítulo I).

Este resultado nos desilusionó en un principio, pues queríamos obtener la acotación del multiplicador de la bola unidad como una consecuencia del hecho de que las $h_{N,k}$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$

formasen base en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si esto ocurriese, dada f en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ y suave:

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle h_{Nlk}, Tf \rangle h_{Nlk}(x) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^a \langle h_{Nlk}, f \rangle h_{Nlk}(x) \end{aligned}$$

Como la acotación de los operadores sumas parciales la habíamos obtenido en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|Tf\|_p \leq A\|f\|_p$ A independiente de f .

Utilizando una igualdad para las funciones de Bessel ((1.26)), vemos que el multiplicador de la bola unidad en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ viene expresado en el mismo tipo de núcleos que los asociados a los operadores sumas parciales S_M y de aquí:

Teorema 1.2 T (multiplicador de la bola unidad) está acotado en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$
 $1 < p < \infty$ $n=1$.

De esto, $(C_p^N(\mathbb{R}^n))' = C_q^N(\mathbb{R}^n)$ en el mismo rango de p 's que teorema 1.2 y obtenemos:

Teorema 2.1 Sea $f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y $S_M f(x) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle h_{Nlk}, f \rangle h_{Nlk}(x)$.
 Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$

Ya comentamos que la función que más pesa en la serie:

$$b_{Nlk}(x) = \sum_{j=lk}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{Nlk+j}(x)$$

es la $h_{Nlk}(x)$. Si llamamos:

$$T_M = \sigma_M - S_M$$

donde σ_M y S_M son los operadores sumas parciales asociados a las

$b_{Nl,k}(x)$ y $h_{Nl,k}(x)$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$, utilizando esencialmente el decaimiento de los coeficientes $d^N(k, j)$ demostramos, en la sección 2 del capítulo II, que los T_M están uniformemente acotados en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$. Esto junto con teorema 2.1 :

Teorema 2.2 Sea $f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma_M f(x) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle b_{Nl,k}, f \rangle b_{Nl,k}(x)$.

Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|\sigma_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y

solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Es natural pasar a plantearnos los teoremas 2.1 y 2.2 en el marco de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ espacios. Para $n=1$ el problema está resuelto, sin embargo para $n \neq 1$ el problema queda abierto.

Para $n=1$, el resultado está incluido en teoremas 2.1 y 2.2. En efecto, cuando $n=1$, N solamente puede tomar los valores 0 y 1 (solamente hay dos armónicos esféricos sólidos independientes en \mathbb{R} , a saber: $p_0(x)=1$ y $p_1(x)=x$) y $B_p(\mathbb{R})$ admite la descomposición:

$$B_p(\mathbb{R}) = C_p^0(\mathbb{R}) \oplus C_p^1(\mathbb{R})$$

donde $C_p^0(\mathbb{R})$ y $C_p^1(\mathbb{R})$ son los conjuntos de funciones pares e impares respectivamente de $B_p(\mathbb{R})$. Este resultado es anterior a la teoría general que presentamos y está escrito en [3] y [4]

Las funciones $h_{Nl,k}(x)$ pueden ser expresadas en términos de las funciones de Bessel esféricas $j_n(x)$ ($= \sqrt{\pi/(2x)} J_{n+1/2}(x)$).

$$N=0 \quad (l=1) \quad h_{0,1,k}(x) = 2\sqrt{2k+1/2} j_{2k}(2\pi x)$$

$$N=1 \quad (l=1) \quad h_{1,1,k}(x) = 2\sqrt{2k+3/2} j_{2k+1}(2\pi x)$$

y las ondas esferoidales prolatas (descritas en la primera parte de la introducción) cuando nos restringimos a $[-1, +1]$ en la frecuencia y $[-c, +c]$ en el tiempo, están definidas por:

$$b_k(x) = \sum_{j=[-(k-1)/2]}^{\infty} \frac{d^N(k,j)}{u_k} \sqrt{2k+4j+1} j_{k+2j}(2\pi x)$$

donde $[-(k-1)/2]$ designa la parte entera de $-(k-1)/2$.

Teoremas 2.1 y 2.2 pueden ser reescritos para $n=1$ en la forma:

Teorema 0.1 Sea $f \in B_p(\mathbb{R})$ y $S_M f(x) = \sum_{k=0}^M (2k+1) \langle f, j_k(2\pi \cdot) \rangle j_k(2\pi x)$

Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $B_p(\mathbb{R})$ si y solamente si $4/3 < p < 4$.

Teorema 0.2 Sea $f \in B_p(\mathbb{R})$ y $\sigma_M f(x) = \sum_{k=0}^M \langle f, b_k \rangle b_k(x)$. Enton-

ces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|\sigma_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $B_p(\mathbb{R})$ si y solamente si $4/3 < p < 4$.

Recientemente Córdoba [6] ha demostrado que el multiplicador de la bola unidad está acotado en el espacio $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$, donde $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones complejas en \mathbb{R}^n tal que:

$$\|f\|_{p,2} = \left(\int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} |f(rx')|^2 dx' \right)^{p/2} dr \right)^{1/p} < \infty$$

La demostración es una extensión vectorial de los métodos de [4]. Este resultado sugiere naturalmente la pregunta de si las funciones $b_{N,k}(x)$ ($h_{N,k}(x)$) constituyen una base en los espacios:

$$B_{p,2}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^{p,2}(\mathbb{R}^n) \mid \text{sop } \hat{f} \subset B(0,1) \}$$

Las propiedades de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ estudiadas en sección 3 del capítulo I, se transmiten a los $B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ y el hecho de que el multiplicador de la bola unidad esté acotado en $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$, hace que $B'_{p,2}(\mathbb{R}^n) = B_{q,2}(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ en el mismo rango de p 's.

Si utilizamos los resultados de la sección i del capítulo II,

los operadores sumas parciales asociados a las $h_{Nlk}(x)$ están definidos por:

$$\begin{aligned} S_{LM}f(x) &= \sum_{N=0}^L \sum_{l=1}^{a_N} \sum_{k=0}^M \langle f, h_{Nlk} \rangle h_{Nlk}(x) = \\ &= \sum_{N=0}^L \sum_{l=1}^{a_N} Y_{Nl}(x') r^{-n/2} \int_0^\infty K_M(r,s) s^{(n/2)-1} f_{Nl}(s) ds \end{aligned}$$

donde hemos desarrollado f en su descomposición via los armónicos esféricos, esto es:

$$f(x) = f(rx') = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_N} Y_{Nl}(x') f_{Nl}(r)$$

$$f_{Nl}(r) = \int_{S^{n-1}} f(rx') Y_{Nl}(x') dx'$$

y $K_M(r,s)$ viene expresado en términos de núcleos del tipo:

$$\frac{rs}{r+s} J'_\nu(r) J_\nu(s)$$

y sus duales, con $\nu = N + (n/2) + 2M + 1$ y $N + (n-2)/2$.

Córdoba prueba para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty |T_{a_j} g_j(r)|^2 \right)^{p/2} r^{(n-1)(1-(p/2))} dr \right)^{1/p} \leq \\ & \leq C_p \left(\int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty |g_j(r)|^2 \right)^{p/2} r^{(n-1)(1-(p/2))} dr \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$\{a_j\}$ es una sucesión de números reales no negativos y $\{g_j\}$ es una familia de funciones localmente integrables.

De (1.26) y de la desigualdad anterior, se deduce que S_{LM} está uniformemente acotado en $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ (no es necesaria la condición de que $\text{sop } \hat{f} \subset B(0,1)$) para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$. Esto junto con $B'_{p,2}(\mathbb{R}^n) = B_{q,2}(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ para el mismo rango de p 's nos conduce a:

Teorema 0.3 Sea $f \in B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ y $S_{LM}f(x) = \sum_{l=0}^L \sum_{l=1}^{a_N} \sum_{k=0}^M \langle f, h_{Nlk} \rangle h_{Nlk}(x)$.

Entonces $\lim_{L,M \rightarrow \infty} \|S_{LM}f - f\|_{p,2} = 0$ para toda f de $B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$.

Este teorema es una versión vectorial de teorema 2.1

Hay dos hechos esenciales en la demostración de teorema 0.3 (teorema 1.2) que no pueden darse en la demostración de un análogo a este teorema en el marco de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ si $n \neq 1$. El primero es que la acotación uniforme de los S_{LM} la hacemos en los espacios $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{Y}_p^N(\mathbb{R}^n)$). Los S_{LM} no podrían estar uniformemente acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo menos para $p > 2$, pues si esto ocurriese, de la inclusión continua de $B_2(\mathbb{R}^n)$ en $B_p(\mathbb{R}^n)$ $p > 2$ (sección 3, capítulo I) las $h_{Nlk}(x)$ serían base en $B_p(\mathbb{R}^n)$ y esto implicaría que el multiplicador de la bola está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$. El segundo hecho concierne a la densidad de las combinaciones lineales finitas de las $h_{Nlk}(x)$ en $B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ (N fijo en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$). La demostración de esto está basada en $B_{p,2}'(\mathbb{R}^n) = B_{q,2}(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ ($(C_p^N(\mathbb{R}^n))' = C_q^N(\mathbb{R}^n)$). En el caso de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ esto no puede ocurrir. En sección 3 del capítulo I demostramos que $B_p'(\mathbb{R}^n) = B_q(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ solamente cuando $p = q = 2$, pues en caso contrario llegaríamos, como antes, a una contradicción con el teorema del multiplicador de la bola unidad en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Aunque el multiplicador de la bola unidad en $\mathcal{Y}_p^N(\mathbb{R}^n)$ y los operadores sumas parciales asociados a las funciones $h_{Nlk}(x)$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ vienen expresados por el mismo tipo de núcleos, es más fuerte la acotación uniforme de los S_M que teorema 1.2, pues para la demostración de este resultado solamente necesitamos la acotación de los operadores que producen los núcleos de la forma $\frac{rs}{r+s} J_\nu(r) J_\nu(s)$ y no la acotación

uniforme con respecto a v . No obstante, corolario 1.3 y lemas 2.3 y 2.4 podrian hacernos ver a teoremas 1.2 y 2.1 como equivalentes.

La estrecha relación entre la acotación del multiplicador de la bola unidad en $L^{p,2}(\mathbb{R}^n)$ y teorema 0.3 es bastante mas clara que en los casos precedentes. En este caso, si es neceraria, en cierto sentido, la acotación uniforme con respecto a v de los operadores asociados a los núcleos $\frac{rs}{r+s} J'_v(r) J_v(s)$.

Es claro, despues de las observaciones anteriores, que los resultados sobre bases para las funciones $h_{Nl,k}(x)$ estan intimamente relacionados con la acotación del multiplicador de la bola unidad. Esto nos sugiere que un análogo a teorema 0.3 en el marco de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ $n \neq 1$ solamente seria cierto para $p=2$.

Debido al fuerte decaimiento de los coeficientes $d^N(k,j)$ en N, k y j , pensamos que la versión para las ondas esferoidales prolatas del teorema 0.3 es cierta, aunque no nos ha sido posible comprobar todos los detalles. Enunciamos entonces:

Teorema 0.4 Sea $f \in B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma_{LM} f(x) = \sum_{N=0}^L \sum_{l=1}^N \sum_{k=0}^M \langle f, b_{Nl,k} \rangle b_{Nl,k}(x)$.
Entonces $\lim_{L,M \rightarrow \infty} \|\sigma_{LM} f - f\|_{p,2} = 0$ para toda f de $B_{p,2}(\mathbb{R}^n)$
si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$.

La teoría general sobre las ondas esferoidales prolatas en \mathbb{R}^n , nos asegura (propiedad (0.5)) que las restricciones de las $b_{Nl,k}(x)$ a $B(0,c)$ forman un sistema ortogonal completo en $L^2(B(0,c))$ (espacio de las funciones tiempo-limitadas). Es natural preguntarnos la misma cuestión que nos hicimos para las funciones banda-limitadas: ¿para que p 's las $b_{Nl,k}(x) \chi_{B(0,c)}(x)$ forman una base en $L^p(B(0,c))$?

Las $b_{Nl,k}(x) \chi_{B(0,c)}(x)$ normalizadas en $L(B(0,c))$ las designamos

por $\phi_{Nl,k}(x)$. Vienen definidas para $x=rx'$ $|x|=r$ $x' \in S^{n-1}$ por

$$\phi_{Nl,k}(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \frac{d^N(k,j)}{u_{Nk}} R_{Nl,k+j}(x) \quad \begin{array}{l} N=0,1,2,\dots \\ l \in \{1,2,\dots,a_N\} \\ k=0,1,2,\dots \end{array}$$

donde:

$$R_{Nl,k}(x) = \sqrt{2(N+(n/2)+2k)} c^{-(N+(n-2)/2)} Y_{Nl}(x') P_k^{(N+(n-2)/2,0)}(1-2(\frac{r}{c})^2)$$

siendo $P_k^{(\alpha,\beta)}$ el k -esimo polinomio de Jacobi de orden (α,β) .

Otra vez, la forma de las $\phi_{Nl,k}(x)$ sugiere estudiar el problema para las funciones $R_{Nl,k}(x)$ y luego extenderlo a las $\phi_{Nl,k}(x)$ aprovechando el decaimiento de los coeficientes $d^N(k,j)$. Como en el caso de las funciones banda-limitadas, vamos a dar resultados en los espacios $L^p(B(0,c)) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$.

El comprobar que las $R_{Nl,k}(x)$ $l \in \{1,2,\dots,a_N\}$ $k=0,1,\dots$ forman una base en $L^p(B(0,c)) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$, es una consecuencia de las propiedades familiares de los polinomios de Jacobi [25] y del siguiente resultado debido a Muckenhoupt [13]:

Teorema 0.5 Sean α y β dos números reales mayores que -1 y a y b dos números reales cualesquiera. Sea $f \in L^p((1-x)^{ap}(1+x)^{bp} \chi_{(-1,+1)})$

y $S_M^{\alpha,\beta} f(x) = \sum_{k=0}^M c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ donde

$$c_k = \frac{\int_{-1}^1 f(t) P_k^{(\alpha,\beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt}{\int_{-1}^1 (P_k^{(\alpha,\beta)}(t))^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt}$$

Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{\alpha,\beta} f(x) = f(x)$ para cada f en

$L^p((1-x)^{ap}(1+x)^{bp} \chi_{(-1,+1)}(x) dx)$ si y solamente si:

$$|a - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{p}| < \min\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\} \quad |b - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{p}| < \min\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\}$$

Utilizando las mismas técnicas que nos hacían obtener teorema 2.2 del 2.1 (sección 2, capítulo II), obtenemos:

Teorema 0.6 Sea $f \in L^p(B(0,c)) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ y

$$S_M f(x) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle f, \phi_{Nlk} \rangle \phi_{Nlk}(x). \text{ Entonces } \lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$$

para toda f de $L^p(B(0,c)) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si

$$\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n+1} \quad n \neq 1 \quad 4/3 \leq p < 4 \quad n=1.$$

Para $n=1$, las $R_{Nlk}(x)$ pueden reescribirse en terminos de los polinomios de Legendre $p_n(x)$:

$$R_{0lk}(x) = (-1)^k c^{1/2} \sqrt{4k+1} p_{2k}\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$R_{1lk}(x) = (-1)^k c^{1/2} \sqrt{4k+3} p_{2k+1}\left(\frac{x}{c}\right)$$

y las restricciones a $[-c, +c]$ normalizadas de las ondas esferoidales asociadas al intervalo $[-1, +1]$ en la frecuencia y $[-c, +c]$ en el tiempo, vienen definidas por:

$$\phi_k(x) = c^{1/2} \sum_{j=[-(k-1)/2]}^{\infty} (-1)^{k+j} \frac{d^N(k,j)}{u_k} \sqrt{2k+4j+1} p_{k+2j}\left(\frac{x}{c}\right)$$

Teorema 0.6 para $n=1$, puede ser visto como una consecuencia de las propiedades de los polinomios de Legendre [25] y del hecho bien conocido de que estos polinomios constituyen una base de $L^p[-1, +1]$ si y solamente si $4/3 < p < 4$ [14] [15], y puede reescribirse:

Teorema 0.7 Sea $f \in L^p[-c, +c]$ ($c > 0$) y $S_M f(x) = \sum_{k=0}^M \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(x)$.

Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $L^p[-c, +c]$ si

y solamente si $4/3 < p < 4$.

Al igual que en el caso de las funciones banda-limitadas, pensamos que una versión vectorial del teorema 0.6 es cierta. Más específicamente, si

$$L^{p,2}(B(0,c)) = \{ f \in L^{p,2}(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } \hat{f} \subset B(0,c) \}$$

entonces:

Teorema 0.8 Sea $f \in L^{p,2}(B(0,c))$ y

$$S_{LM}f(x) = \sum_{N=0}^L \sum_{l=1}^N \sum_{k=0}^M \langle f, \phi_{Nlk} \rangle \phi_{Nlk}(x) . \text{ Entonces } \lim_{L,M \rightarrow \infty} \|S_{LM}f - f\|_{p,2} = 0$$

si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$.

La demostración de este resultado, pensamos que se deduce del decaimiento de los $d^N(k,j)$ en N, k y j y de una extensión vectorial del resultado de Muckenhoupt.

Los detalles de los teoremas 0.4 y 0.8 esperamos presentarlos en una proxima publicación.

Las ondas esferoidales prolatas con las que trabajamos en esta memoria, surgen al maximizar el cociente:

$$\frac{\int_S |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 dt}$$

sobre todas las funciones de

$$B(R) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } \hat{f} \subset R \}$$

cuando $R=B(0,1)$ y $S=B(0,c)$ $c>0$. Es claro que podria haberse hecho una teoria más general cuando R y S son dos bolas arbitrarías de \mathbb{R}^n , y todos los resultados que hemos enunciado seria válidos en este marco.

Alternativas a la teoria que presentamos podrian darse al tomar otros subconjuntos R y S de \mathbb{R}^n . Un caso donde teoremas 0.1 y 0.2 tendrian una generalización natural a $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^n)$ es cuando:

$$R = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad -a \leq x_1 \leq +a \quad -b \leq x_2 \leq +b \}$$

y $S=cR$ $c>0$. Ya hemos comentado que la familia de funciones

$b_{nm}(x_1, x_2) = b_n^1(x_1) b_m^2(x_2)$ $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($b_n^1(x_1)$ (resp. $b_m^2(x_2)$) ondas esferoidales prolatas asociadas a $[-a, +a]$, $[-ca, +ca]$ (resp. $[-b, +b]$, $[-cb, +cb]$)) formaban un sistema ortonormal completo en $B(R)$. Si $B_p(R)$ es la extensión natural de $B(R)$ a $L^p(\mathbb{R}^2)$, es una consecuencia inmediata de teorema 0.2 que la familia $b_{nm}(x_1, x_2)$ forma una base en $B_p(R)$ si y solamente si $4/3 < p < 4$. La extensión de este resultado a \mathbb{R}^n es inmediata.

CAPITULO I

CAPITULO I - FUNCIONES BANDA-LIMITADAS

1- Ondas esferoidales prolatas

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, decimos que es banda-limitada si $\text{sop } \hat{f}$ es compacto, donde \hat{f} designa la transformada de Fourier de f . Debido al comportamiento de la transformada de Fourier con las dilataciones, se puede normalizar siempre esta situación suponiendo que el soporte de \hat{f} está contenido en la bola unidad. En lo sucesivo, y mientras no se indique expresamente lo contrario, supondremos siempre que f es banda-limitada si y solamente si $\text{sop } \hat{f} \subset B(0,1)$.

Al conjunto

$$B_2(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } \hat{f} \subset B(0,1) \}$$

lo llamaremos conjunto de las funciones banda-limitadas de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Las ondas esferoidales prolatas se definen como las autofunciones en $B_2(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación integral:

$$(1.1) \quad \lambda \phi(x) = \int_{B(0,c)} \left(\int_{B(0,1)} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) \phi(y) dy$$

donde $B(0,c)$ designa la bola de centro 0 y radio c .

La formula de inversión para la transformada de Fourier [23], nos permite expresar una función $f \in B_2(\mathbb{R}^n)$ en la forma:

$$f(x) = \int_{B(0,1)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Es claro que una tal función es extremadamente suave, es más, puede ser extendida a una función analítica en \mathbb{C}^n [26]. La ecuación (1.1) puede ser entonces estudiada en $L^2(B(0,c))$ y sus soluciones extendidas a \mathbb{R}^n via la igualdad (1.1).

Si llamamos

$$T(x) = \int_{B(0,c)} \left(\int_{B(0,1)} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) \phi(y) dy$$

es fácil ver que el operador T estudiado en el espacio de Hilbert $L^2(B(0,c))$ es autoadjunto, compacto, definido positivo y $\lambda=0$ no es un autovalor. La teoría espectral estándar [16] nos asegura la existencia de un conjunto de autofunciones $\phi_n(x) \in L^2(B(0,c))$ $n=0,1,\dots$ formando un sistema ortonormal completo en $L^2(B(0,c))$ y una sucesión de autovalores $\{\lambda_n\}$ decreciente, estrictamente positiva y tendiendo a cero, como soluciones de (1.1) en $L^2(B(0,c))$.

Definimos, para $x \in \mathbb{R}^n$, las ondas esferoidales prolatas por:

$$(1.2) \quad b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{B(0,c)} \left(\int_{B(0,1)} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) \phi_n(y) dy$$

Son funciones de $B_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{b}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} [\phi_n(t) \chi_{B(0,c)}(t)](x) \chi_{B(0,1)}(x)$$

Verifican la doble relación de ortogonalidad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_n(x) \overline{b_m(x)} dx = \delta_{nm} \quad \int_{B(0,c)} b_n(x) \overline{b_m(x)} dx = \lambda_n \delta_{nm}$$

Forman un sistema ortonormal completo en el espacio de Hilbert $B_2(\mathbb{R}^n)$ y sus restricciones a $B(0,c)$, $b_n(x) \chi_{B(0,c)}(x)$ $n=0,1,\dots$, forman un sistema ortogonal completo en $L^2(B(0,c))$. Además, la familia $(b_n(x), \lambda_n)$ $n=0,1,\dots$ son las soluciones de la ecuación integral (1.1) en $B_2(\mathbb{R}^n)$.

El razonamiento funcional anterior nos asegura la existencia de las funciones $b_n(x)$, sin embargo no nos permite obtener suficiente información sobre ellas. Hay ciertos problemas unidimensionales del tipo $L\phi = \lambda\phi$ en $L^2(0,1)$ cuyas autofunciones coinciden con las de un cierto operador de Sturm-Liouville. Es claro que la teoría general sobre estos últimos problemas aporta más información real sobre las autofunciones que la teoría espectral. Nuestra situación no es en \mathbb{R} sino en \mathbb{R}^n , sin embargo, las características especiales de nuestro operador T nos permitirán reducir su estudio a una familia de problemas unidimensionales. La idea será estudiar cada uno de estos problemas unidimensionales via un cierto operador de Sturm-Liouville.

No hay restricción en normalizar el rango de integración del operador T a $B(0,1)$. Si hacemos esto:

$$T\phi = L^2\phi_{-1}$$

donde $\phi_{-1}(x) = \phi(-x)$ y

$$L\phi(x) = \int_{B(0,1)} e^{2\pi i cxy} \phi(y) dy$$

L está estudiado con bastante detalle en [19]. Es un operador autoadjunto, compacto y $\lambda=0$ no es un autovalor. Sus autofunciones tienen que ser pares o impares y sus autovalores serán reales o imaginarios puros según sean sus autofunciones asociadas pares o impares. El conjunto de sus autofunciones forma un sistema

ortonormal completo de $L^2(B(0,1))$, esto hace que coincidan con las autofunciones de T (módulo la normalización). Los autovalores de T corresponden con el módulo de los autovalores de L al cuadrado.

L es una transformada de Fourier y por lo tanto, el estudio del problema $L\psi = \lambda\psi$ en $L^2(B(0,1))$ puede ser reducido al estudio de una familia de problemas unidimensionales haciendo uso de la descomposición de $L^2(\mathbb{R}^n)$ via los armónicos esféricos. Más específicamente:

Sea $\eta_2^N(\mathbb{R}^n)$ $N=0,1,2,\dots$ el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ formado por las combinaciones lineales finitas de la forma $Y_N(x')f(r)$ ($x=rx'$ $|x|=r$ $x' \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / |x|=1\}$) donde $Y_N(x')$ es un armónico esférico superficial de grado N y f es radial, entonces:

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \sum_{N=0}^{\infty} \eta_2^N(\mathbb{R}^n)$$

Los $\eta_2^N(\mathbb{R}^n)$ son subespacios cerrados, mutuamente ortogonales e invariantes bajo la acción de la transformada de Fourier. Si $f(x) = Y_N(x')f_0(r)$ entonces $f(x) = Y_N(x')F_0(r)$ donde:

$$(1.3) \quad F_0(r) = 2\pi i^{-N} r^{-(n-2)/2} \int_0^{\infty} f_0(s) J_{N+(n-2)/2}(2\pi rs) s^{n/2} ds$$

(estos resultados pueden ser encontrados en [23])

Si $\{Y_{Nl}\}$ $l \in \{1,2,\dots,a_N\}$ es una base ortonormal en $L^2(S^{n-1})$ del conjunto de los armónicos esféricos superficiales de grado N , las soluciones de $L\psi = \lambda\psi$ en $L^2(B(0,1))$ son:

$$\begin{aligned} (Y_{Nl}(x') R_{Nk}(r), \lambda_{Nk}) \quad & N=0,1,2,\dots \\ & l \in \{1,2,\dots,a_N\} \\ & k=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

donde para N y l fijos, $(R_{Nk}(r), \lambda_{Nk})$ son las soluciones del problema:

$$\lambda_N R_N(r) = \frac{2\pi i^N}{c^{(n-2)/2}} r^{-(n-2)/2} \int_0^1 R_N(s) J_{N+(n-2)/2}(2\pi c r s) s^{n/2} ds$$

en $L^2(s^{n-1} \chi_{(0,1)}(s) ds)$ ($= f$ tal que $\int_0^1 s^{n-1} |f(s)|^2 ds < \infty$)

Si llamamos $\gamma_N = \lambda_N (2\pi c)^{(n-1)/2}$ y $\varphi_N(r) = r^{(n-1)/2} R_N(r)$, las soluciones de la ecuación (1.1) en $L^2(B(0,c))$ son:

$$(c^{(n-1)/2} \gamma_{Nl}(x) r^{-(n-1)/2} \varphi_{Nk}(rc^{-1}), 2\pi c |\gamma_{Nk}|^2) \quad \begin{matrix} N=0,1,\dots \\ l \in \{1,\dots,a_N\} \\ k=0,1,\dots \end{matrix}$$

donde para N y l fijos $(\varphi_{Nk}, \gamma_{Nk})$ $k=0,1,\dots$ son las soluciones del problema:

$$(1.4) \quad \gamma_N \varphi_N(r) = \int_0^1 J_{N+(n-2)/2}(2\pi c r s) \sqrt{2\pi c r s} \varphi_N(s) ds$$

en $L^2(0,1)$.

Para estudiar esta ecuación integral en $L^2(0,1)$, definimos el operador:

$$L_N \varphi(r) = \int_0^1 J_{N+(n-2)/2}(2\pi c r s) \sqrt{2\pi c r s} \varphi(s) ds$$

Es fácil ver que este operador es autoadjunto, compacto y $\gamma=0$ no es un autovalor. Otra vez, la teoría espectral estándar nos asegura la existencia de un conjunto ortonormal completo de autofunciones φ_{Nk} de $L^2(0,1)$ $k=0,1,\dots$. Conocemos la existencia de las $\varphi_{Nk}(x)$ pero no tenemos suficiente información sobre ellas. Vamos a obtener un operador de Sturm-Liouville

$$M_N \varphi(x) = (p(x) \varphi'(x))' - q(x) \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

cuyas autofunciones coincidan con las de L_N .

Por la reducción que hemos ido haciendo hasta llegar a L_N ,

toda autofunción de este operador tiene que anularse en cero si $n \neq 1$. Si $n=1$, N solo puede tomar los valores 0 y 1 (solamente hay dos armónicos esféricos sólidos independientes en \mathbb{R} , $p_0(x)=1$ y $p_1(x)=x$). Si $N=0$, L_0 produce las autofunciones pares del operador L y estas, no son nulas en cero pero si sus derivadas. Si $N=1$, L_1 produce las autofunciones impares del operador L y estas si son nulas en cero. Es claro que las condiciones de frontera que tendremos que imponerle al problema $M_N \varphi = \lambda \varphi$ serán que las soluciones sean nulas en cero (salvo que $n=0$ y $N=0$, en cuyo caso le impondremos que la derivada sea nula en cero) y finitas o continuas en 1. Si además al operador M_N le exigimos que satisfaga la igualdad:

$$L_N \circ M_N = M_N \circ L_N$$

las autofunciones de L_N y M_N tienen que coincidir.

Con las condiciones de frontera impuesta a M_N , suponiendo que $p(1)=0$ y exigiendo que M_N satisfaga la igualdad anterior, este operador tiene que venir definido por:

$$M_N \varphi(x) = ((1-x^2) \varphi'(x))' - (4\pi^2 c^2 x^2 + \frac{(N+(n-2)/2)^2 - 1/4}{x^2}) \varphi$$

y las φ_{Nk} (autofunciones de L_N) serán las autofunciones del problema:

$$(1.5) \quad ((1-x^2) \varphi'(x))' + (\frac{1/4 - (N + (n-2)/2)^2}{x^2} - 4\pi^2 c^2 x^2 + \chi_N(c)) \varphi = 0$$

$0 \leq x \leq 1$ y con las condiciones de frontera antes citadas.

El problema (1.5) puede ser visto como una perturbación por el factor $4\pi^2 c^2 x^2$ del problema:

$$(1.6) \quad ((1-x^2) \varphi'(x))' + (\frac{1/4 - (N + (n-2)/2)^2}{x^2} + \chi_N(0)) \varphi(x) = 0$$

$0 \leq x \leq 1$ y con las mismas condiciones de frontera. Es usual, en estos casos, resolver este último problema y obtener la solución del problema original como una serie en las soluciones de (1.6).

Con las condiciones de frontera impuestas a (1.6) y utilizando el método de Frobenius, las soluciones de (1.6) son :

$$x_{Nk}(0) = (N + (n-2)/2 + 2k + 1/2)(N + (n-2)/2 + 2k + 3/2)$$

$$S_{Nk}(x) = \sqrt{2(N + (n-2)/2 + 2k)} x^{N+(n-1)/2} P_k^{(N+(n-2)/2, 0)}(1-2x^2)$$

donde $P_k^{(\alpha, \beta)}$ designa el k-esimo polinomio de Jacobi de orden (α, β) .

Utilizando las propiedades conocidas para los polinomios de Jacobi [25], es facil comprobar que :

$$\int_0^1 S_{Nk}(x) S_{Nk'}(x) dx = \delta_{kk'}$$

$$(1.7) \quad x^2 S_{Nk}(x) = A^N(k+1) S_{Nk+1}(x) + B^N(k) S_{Nk}(x) + A^N(k) S_{Nk-1}(x)$$

donde:

$$A^N(k) = \frac{k(N + (n-2)/2 + k)}{\sqrt{N + (n-2)/2 + 2k - 1} \sqrt{N + (n-2)/2 + 2k + 1} (N + (n-2)/2 + 2k)}$$

$$B^N(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(N + (n-2)/2)^2}{(N + (n-2)/2 + 2k)(N + (n-2)/2 + 2k + 2)} \right)$$

Las soluciones de (1.5) las expresamos en la forma:

$$\varphi_{Nk}(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d^N(k, j) S_{Nk+j}(x)$$

Utilizando (1.7) y haciendo que $\varphi_{Nk}(x)$ satisfaga (1.5), obtenemos la siguiente relación para los coeficientes $d^N(k, j)$:

$$f^N(k, j, c) d^N(k, j) = A^N(k+j+1) d^N(k, j+1) + A^N(k+j) d^N(k, j-1) \quad j \geq -k+1 \quad (1.8)$$

$$f^N(k, -k, c) d^N(k, -k) = d^N(k, -k+1)$$

donde:

$$f^N(k, j, c) = \frac{4\pi^2 c^2 B^N(k+j) + \chi_{Nk+j}(0) - \chi_{Nk}(c)}{4\pi^2 c^2} \quad j \geq -k+1 \quad (1.9)$$

$$f^N(k, -k, c) = (N+(n-2)/2 + 2) \sqrt{\frac{N+(n-2)/2+3}{N+(n-2)/2+1}} \left(\frac{\chi_{N0}(0) + 4\pi^2 c^2 \frac{N+(n-2)/2+1}{N+(n-2)/2+2} - \chi_{Nk}(c)}{4\pi^2 c^2} \right)$$

Si llamamos

$$u_{Nk}^2 = \int_0^1 |\varphi_{Nk}(x)|^2 dx = \sum_{j=-k}^{\infty} |d^N(k, j)|^2$$

y recordamos que $\gamma_{Nk}, k=0, 1, \dots$ son los autovalores de L_N (0.4), las soluciones normalizadas de la ecuación integral (1.1) en $L^2(B(0, c))$ son para $x=rx', |x|=r, x' \in S^{n-1}$:

$$\phi_{Nl,k}(x) = c^{-1/2} Y_{Nl}(x') \sum_{j=-k}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} \frac{S_{Nk+j}(\frac{r}{c})}{r^{(n-1)/2}} \quad (1.10)$$

$$\lambda_{Nk} = 2\pi c |\gamma_{Nk}|^2$$

$N=0, 1, \dots$
 $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$
 $k=0, 1, \dots$

Las ondas esferoidales prolatas $b_{Nl,k}(x)$ estaban definidas por (1.2) a partir de la $\phi_{Nl,k}(x)$ y los λ_{Nk} . Utilizando (1.3), (1.4) y la igualdad [19]:

$$\int_0^1 J_{N+(n-2)/2}(\sqrt{2\pi r s}) \sqrt{2\pi r s} S_{Nk}(s) ds = \sqrt{N+(n/2)+2k} \frac{J_{N+(n/2)+2k}(\sqrt{2\pi r})}{(2\pi r)^{1/2}} \quad (1.11)$$

evaluamos (1.2) para obtener:

$$b_{Nl,k}(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{Nl,k+j}(x) \quad (1.12)$$

$N=0, 1, \dots$
 $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$
 $k=0, 1, \dots$

donde:

$$h_{N1k}(x) = Y_{N1}(x') \sqrt{N + (n/2) + 2k} \frac{J_{N + (n/2) + 2k} (2\sqrt{x}r)}{r^{n/2}} \quad (x=rx')$$

Vamos ahora a estudiar el comportamiento de los coeficientes $d^N(k, j)$. De este estudio podremos deducir que el coeficiente que mas pesa en la serie (1.12) es el correspondiente a $j=0$, lo cual nos permitía pensar que cuando k es suficientemente grande, $b_{N1k}(x)$ es esencialmente $h_{N1k}(x)$.

De (1.8) y del hecho de que $|A^N(k)|$ está uniformemente acotado en k y N por $1/2$, alguna de las dos desigualdades siguientes debe verificarse:

$$(1.13) \quad |d^N(k, j)| |f^N(k, j, c)| \leq |d^N(k, j-1)| \quad j \geq -k+1$$

$$(1.14) \quad |d^N(k, j)| |f^N(k, j, c)| \leq |d^N(k, j+1)|$$

Vamos a demostrar que para todo k mayor o igual que un cierto $K(c)$, solamente se puede dar (1.13) si j es positivo y (1.14) si j es negativo, cualquiera que sea $N=0, 1, \dots$.

Supongamos que para un cierto j positivo se tiene (1.14) y que para $j+1$ (1.13), entonces:

$$(1.15) \quad |f^N(k, j, c)| |f^N(k, j+1, c)| \leq 1$$

si sustituimos $x_{Nk}(c)$ por la variable x , el producto $f^N(k, j, c) \cdot f^N(k, j+1, c)$ podemos entenderlo como una parábola $g(x)$. Ya que

$$\frac{1}{2} \leq |B^N(k)| \leq 1$$

uniformemente en k y N , es facil ver que si x no está en el intervalo:

$$I_{kj}^N = \left[-2\pi^2 c^2 + (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 1/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 3/2) , \right. \\ \left. , + 8\pi^2 c^2 + (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 5/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 7/2) \right]$$

entonces $|g(x)| > 1$.

Utilizando la caracterización de los autovalores de los problemas (1.5) (1.6) por el cociente de Rayleigh [7], deducimos:

$$(1.16) \quad (N + (n-2)/2 + 2k + 1/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 3/2) < \chi_{Nk}(c) < \\ < (N + (n-2)/2 + 2k + 1/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 3/2) + 4\pi^2 c^2$$

Este hecho nos permite asegurar la existencia de un $K_1(c)$ tal que si $k \geq K_1(c)$:

$$(N + (n-2)/2 + 2k + 1/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 3/2) + 4\pi^2 c^2 < \\ < (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 1/2) (N + (n-2)/2 + 2k + 2j + 3/2) - 2\pi^2 c^2$$

para todo $N=0,1,\dots$ y $j \geq 1$. Así, si $k \geq K_1(c)$, $\chi_{Nk}(c) \notin I_{kj}^N$ y $|g(\chi_{Nk}(c))| > 1$, lo cual supone una contradicción con (1.15). luego si $k \geq K_1(c)$ y para un $j_0 \geq 1$ se da (1.14), para j_0+1 (de hecho podemos suponer para $j \geq j_0$) se tiene que dar (1.14).

Utilizando (1.16), siempre podemos encontrar un $K_2(c)$ tal que si $k \geq K_2(c)$ entonces:

$$(1.17) \quad |f^N(k, j, c)| \geq \frac{|j| (N + (n-2)/2 + 2k + |j| + 1)}{4\pi^2 c^2} \geq 1 \quad -k \leq j < \infty$$

Si $k > \max \{K_1(c), K_2(c)\}$ y existe j_0 para el cual se verifica (1.14), por lo anterior para $j \geq j_0$ debe verificarse (1.14). Si esto ocurre, (1.17) nos dice que la solución $\varphi_{Nk}(x)$ de (1.5) no puede converger en $x=1$ y esto contradice las condiciones de frontera de dicho problema.

Podemos asegurar:

$$(1.18) \quad |d^N(k, j+1)| \leq |d^N(k, j)| |f^N(k, j, c)| \leq |d^N(k, j-1)|$$

si $k \geq \max \{K_1(c), K_2(c)\}$, cualquiera que sea $N=0, 1, \dots$ y $j \geq 1$.

Si suponemos ahora que para un cierto $j_0 \in [-k+1, -1]$ se dá (1.13), por un razonamiento análogo al anterior, existirá un $K_3(c)$ tal que si $k \geq K_3(c)$, para $j \leq j_0$ se tendría que verificar (1.13). En particular para $j = -k+1$.

$$|d^N(k, -k+1)| |f^N(k, -k+1, c)| \leq |d^N(k, k)|$$

De (1.9):

$$|f^N(k, -k, c)| |f^N(k, -k+1, c)| \leq 1$$

y volviendo a utilizar un razonamiento análogo al anterior, esto no puede ocurrir si k es mayor que un cierto $K_4(c)$. Concluimos:

$$(1.19) \quad |d^N(k, j-1)| \leq |d^N(k, j)| |f^N(k, j, c)| \leq |d^N(k, j+1)|$$

si $k \geq \max \{K_3(c), K_4(c)\}$, cualquiera que sea $N=0, 1, \dots$ y $j \in [-k+1, -1]$.

Si $k \geq \max \{K_1(c), K_2(c), K_3(c), K_4(c)\}$ y utilizamos (1.17), (1.18), (1.19) y (1.9):

$$(1.20) \quad |d^N(k, j)| < \begin{cases} \frac{4 \pi^2 c^2}{j(N + (n/2) + 2k + j)} |d^N(k, j-1)| \leq \frac{4 \pi^2 c^2}{j(N + (n/2) + 2k + j)} |d^N(k, 0)| & j \geq 1 \quad N=0, 1, \dots \\ \frac{4 \pi^2 c^2}{|j|(N + (n/2) + 2k + |j|)} |d^N(k, j+1)| \leq \frac{4 \pi^2 c^2}{|j|(N + (n/2) + 2k + |j|)} |d^N(k, 0)| & j \in [-k, -1] \quad N=0, 1, \dots \end{cases}$$

y como una consecuencia de esto:

$$(1.21) \quad \frac{(N + (n/2) + 2k)^2}{A + (N + (n/2) + 2k)^2} \leq \frac{|d^N(k, 0)|^2}{u_{Nk}^2} \leq 1$$

siendo A una constante que solo depende de c.

2- Funciones de Bessel.

Si designamos por $J_\nu(x)$ la función de Bessel de orden ν , es facil deducir el comportamiento de esta en el cero y en el infinito:

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad x \rightarrow 0$$

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\{x - (\nu + 1/2)\pi/2\} \quad x \rightarrow \infty$$

y es una tarea más delicada obtener su comportamiento cuando x es del orden de ν . Esta sección está dedicada a obtener el comportamiento de $J_\nu(x)$ y $J'_\nu(x)$ cuando $x \approx \nu$.

Trabajaremos con la expresión para la función de Bassel [27] :

$$(1.22) \quad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\theta - x\sin\theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\nu\theta - x\sin\theta)} d\theta - \\ - \frac{\text{sen}\nu\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\nu t - x\sinh t} dt$$

la cual nos permite ver a $J_\nu(x)$ como una suma de dos integrales oscilatorias mas un termino de error. En efecto, es facil ver que cualquiera que sea $x > 0$ tenemos:

$$\left| \frac{\operatorname{sen} vx}{2} \int_0^{\infty} e^{-vt - x \operatorname{senh} t} dt \right| < \frac{A}{v + x}$$

donde A, al igual que a lo largo de toda esta sección, designa una constante absoluta (independiente de v y x).

El hecho de expresar $J_v(x)$ en terminos de integrales oscilatorias, sugiere la utilización del método estandar para estimar este tipo de integrales, a saber: el método de la fase estacionaria.

Este método persigue estudiar el comportamiento asintótico de integrales de la forma:

$$I(\lambda) = \int_R e^{i\lambda\varphi(t)} f(t) dt$$

Si la derivada de la fase, $\varphi(t)$, no se anula en el soporte de la amplitud, $f(t)$, y le exigimos cierta regularidad a esta, una integración por partes nos asegura que $I(\lambda) = O(\lambda^{-1})$. Si existe un punto en el soporte de f tal que $\varphi'(t_0) = 0$ (podemos suponer que es único, pues en caso contrario cortaríamos la integral utilizando una partición de la unidad regular y se estimaría cada una de ellas por separado) la situación es más delicada.

Si solamente quisieramos obtener una estimación superior de $I(\lambda)$, la estrategia a seguir es dividir $I(\lambda)$ en dos integrales, la primera sobre un entorno suficientemente pequeño de t_0 y la segunda sobre el complementario de este intervalo. En la primera, la fase es esencialmente constante y no cabe esperar cancelación. Esta integral la mayoramos por la medida del intervalo. En la segunda integral, supuesto que la derivada de la fase no es nula, aprovechamos la cancelación integrando por partes.

Si lo que perseguimos sobre la integral $I(\lambda)$ es conocer un término principal más un término de error, la táctica a seguir

es la siguiente: supongamos que existe un único punto t_0 tal que $\varphi'(t_0) = 0$ y $\varphi''(t_0) \neq 0$ (por ejemplo > 0). Si $x^2 = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ entonces:

$$I(\lambda) = e^{i\lambda\varphi(t_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} h(x) dx$$

para una cierta función $h(x)$ que supondremos suave.

Utilizando Parseval [23] y

$$(e^{\pm i\lambda t^2}) (\xi) = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} \lambda^{-1/2} e^{-i\xi^2 \pi^2 \lambda^{-1}}$$

obtenemos:

$$I(\lambda) = \sqrt{\pi} \frac{e^{i(\lambda\varphi(t_0) + \pi/4)}}{\lambda^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi^2 \pi^2 \lambda^{-1}} h(\xi) d\xi$$

Ya que la transformada de Fourier transforma derivación en producto [23] ,desarrollando por Taylor $e^{-i\xi^2 \pi^2 \lambda^{-1}}$:

$$I(\lambda) = \sqrt{\pi} \frac{e^{i(\lambda\varphi(t_0) + \pi/4)}}{\lambda^{1/2}} \left\{ h(0) + \left(\frac{i}{4\lambda}\right) D^2 h(0) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{i}{4\lambda}\right)^{n-1} D^{2n-2} h(0) + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^n R_n(\lambda) \right\}$$

donde:

$$R_n(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} D^{2n} h(t) g_\lambda(t) dt \\ g_\lambda(t) = \left(\int_0^1 (1-s)^n e^{-i\xi^2 \pi^2 \lambda^{-1} s} ds \right)^\wedge(t)$$

Para obtener una formula asintótica optima para $I(\lambda)$, tendria que ocurrir que $R_n(\lambda) \approx O(1)$ y esto depende de la regularidad de h .

$$|R_n(\lambda)| < \|D^{2n}h\|_\infty \|g_\lambda\|_1 = \|D^{2n}h\|_\infty \|g_1\|_1$$

$$y \quad g_1(x) = O(x^{-2}) \quad x \rightarrow \infty$$

Ya que $h(0)$ depende de $f(t_0)$ y $\varphi''(t_0)$, la expresión asintótica para $I(\lambda)$ nos viene a decir que los puntos donde la fase permanece esencialmente constante (t_0 tal que $\varphi'(t_0)=0$) son los puntos que aportan el peso principal en $I(\lambda)$.

Vamos a aplicar las ideas acabadas de exponer, para estimar las dos integrales oscilatorias que aparecen en (1.22). La derivada de la fase, $\varphi(\theta) = v\theta - x \sin \theta$, de estas integrales solamente se anula si $x \geq v$.

Si suponemos que:

$$x \in [0, v - v^{1/3}] \subset [0, v/2] \cup \left(\bigcup_{j=0}^M (v - 2^{j+1} v^{1/3}, v - 2^j v^{1/3}) \right)$$

donde $\frac{v^{2/3}}{2} < 2^M \leq v^{2/3}$, una integración por partes demuestra:

$$\left| \int_0^\pi e^{\pm i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta \right| \leq A v^{-1} \quad x \in [0, v/2]$$

$$\left| \int_0^\pi e^{\pm i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta \right| \leq A 2^{-j} v^{-1/3} \quad x \in (v - 2^{j+1} v^{1/3}, v - 2^j v^{1/3})$$

$$j \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

Suponemos ahora que $x \in (v - v^{1/3}, v + v^{1/3}]$. Hacemos $x = v + a$

$$(1.23) \quad \int_0^\pi e^{\pm i(v\theta - (v+a) \sin \theta)} d\theta =$$

$$= \int_0^{\lambda^{-\epsilon}} e^{\pm i(v\theta - (v+a) \sin \theta)} d\theta + \int_{\lambda^{-\epsilon}}^\pi e^{\pm i(v\theta - (v+a) \sin \theta)} d\theta$$

A $\lambda^{-\epsilon}$ le exigimos que si $a > 0$ entonces $\lambda^{-\epsilon} > \theta_0$, donde θ_0 es el punto donde

se anula la derivada de la fase ($\cos \theta_0 = \frac{v}{v+a}$)

En la segunda integral de (1.23), supuesto que la derivada de la fase no se anula, integramos por partes y obtenemos:

$$\left| \int_{\lambda^{-\epsilon}}^{\pi} e^{\pm i (v\theta - (v+a) \sin \theta)} d\theta \right| \leq \frac{A}{v - (v+a) \cos \lambda^{-\epsilon}} \leq A v^{-1} \lambda^{2\epsilon}$$

En la primera integral de (1.23), la fase es esencialmente constante y no hay esperanza de cancelación, por tanto mayoramos por $\lambda^{-\epsilon}$. Ya que $\theta_0 \leq \left(\frac{3a}{v+a} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{3}}{1/3}$ y la mejor estimación para (1.23) se tendrá cuando $v^{-1} \lambda^{2\epsilon}$ sea del mismo orden (con respecto a v) que $\lambda^{-\epsilon}$, tomamos $\lambda^{\epsilon} = \sqrt{3} v^{1/3}$. Entonces:

$$\left| \int_0^{\pi} e^{\pm i (v\theta - (v+a) \sin \theta)} d\theta \right| \leq A v^{-1/3} \quad a \in (-v^{1/3}, v^{1/3}]$$

Vamos a suponer ahora que $x > v + v^{1/3}$, y otra vez ponemos $x = v + a$. En este caso la derivada de la fase se anulará en θ_0 ($\cos \theta_0 = \frac{v}{v+a}$). Llamamos $\lambda = (2va + a^2)^{1/2}$ y $\varphi(\theta) = v\theta - (v+a) \sin \theta$

$$\int_0^{\pi} e^{\pm i \varphi(\theta)} d\theta = e^{\pm i \varphi(\theta)} \int_{-\theta_0}^{\pi - \theta_0} e^{\pm i \lambda \left(\frac{\varphi(\xi + \theta_0) - \varphi(\theta_0)}{\lambda} \right)} d\xi$$

Definimos:

$$\begin{aligned} h_1 : [0, \pi - \theta_0] &\longrightarrow [0, h_1(\pi - \theta_0)] \\ \xi &\longrightarrow \left(\frac{\varphi(\xi + \theta_0) - \varphi(\theta_0)}{\lambda} \right)^{1/2} \\ h_2 : [-\theta_0, 0] &\longrightarrow [0, h_2(-\theta_0)] \\ \xi &\longrightarrow \left(\frac{\varphi(\xi + \theta_0) - \varphi(\theta_0)}{\lambda} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

h_1 y h_2 son funciones inyectivas, derivables y con derivada disti-

ta de Cero en sus respectivos dominios. Si $h_i(\xi) = t \quad i \in \{1, 2\}$:

$$\int_0^\pi e^{\pm i \varphi(\theta)} d\theta = e^{\pm i \varphi(\theta_0)} \int_{-h_2(-\theta_0)}^{h_1(\pi-\theta_0)} e^{\pm i \lambda t^2} g(t) dt$$

donde:

$$g(t) = \begin{cases} (h_1^{-1})'(t) & \text{si } t \in [0, h_1(\pi-\theta_0)] \\ \sqrt{2} & \text{si } t = 0 \\ -(h_2^{-1})' & \text{si } t \in [-h_2(-\theta_0), 0] \end{cases}$$

Aplicando las ideas antes expuesta a $\int_{-h_2(-\theta_0)}^{h_1(\pi-\theta_0)} e^{\pm i \lambda t^2} g(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{i \varphi(\theta)} d\theta + \int_0^\pi e^{-i \varphi(\theta)} d\theta &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{1/2}} \cos(\varphi(\theta_0) + \pi/4) + \frac{2 \operatorname{sen} v\pi}{2v+a} + \\ &+ i \frac{e^{i(\varphi(\theta_0) + \pi/4)} \pi^{1/2}}{4\lambda^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (g'' \chi_{[-h_2(-\theta_0), h_1(\pi-\theta_0)]})^\wedge(\xi) \left(\int_0^1 e^{-i\xi^2 \pi^{2\lambda-1} s} ds \right) d\xi \\ &- i \frac{e^{-i(\varphi(\theta_0) + \pi/4)} \pi^{1/2}}{4\lambda^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} (g'' \chi_{[-h_2(-\theta_0), h_1(\pi-\theta_0)]})^\wedge(\xi) \left(\int_0^1 e^{i\xi^2 \pi^{2\lambda-1} s} ds \right) d\xi \end{aligned}$$

Estas dos últimas integrales están mayoradas, salvo un factor constante, por:

$$\sup_{\xi \in [-h_2(-\theta_0), h_1(\pi-\theta_0)]} |g''(\xi)| \leq \begin{cases} A \frac{v^2}{(2va+a^2)} & \text{si } v^{1/3} \leq a \leq v \\ A & \text{si } a \geq v \end{cases}$$

De esto y (1.22) obtenemos:

$$(1.24) \quad J_v(v+x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\theta(x))}{(2vx+x^2)^{1/4}} + h(v,x) \quad x \geq v^{1/3}$$

donde:

$$\theta(x) = (2vx+x^2)^{1/2} - v \arccos \frac{1}{v+x} - \pi/4$$

$$|h(v, x)| \leq \begin{cases} A \left(\frac{v^2}{(2vx + x^2)^{7/4}} + \frac{1}{v+x} \right) & v^{1/3} \leq x \leq v \\ \frac{A}{v+x} & x \geq v \end{cases}$$

Nos vamos a ocupar ahora de la derivada de $J_v(x)$. Solamente obtendremos estimaciones superiores para esta.

$$(1.25) \quad J'_v(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \sin \theta e^{i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \sin \theta e^{-i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta + \\ + \frac{\sin v\pi}{\pi} \int_0^\infty \sinh t e^{-vt - x \sinh t} dt$$

Como antes, la tercera integral es termino de error y con el mismo decaimiento que para $J_v(x)$.

Integración por partes demuestra que:

$$\left| \int_0^\pi \sin \theta e^{\pm i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta \right| \leq A v^{-1} \quad x \in [0, v/2]$$

$$\left| \int_0^\pi \sin \theta e^{\pm i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta \right| \leq A 2^{-j/2} v^{2/3}$$

$$x \in (v \cdot 2^{j+1} v^{1/3}, v \cdot 2^j v^{1/3}] \quad j \in \{0, 1, \dots, M-1\} \quad \frac{v^{2/3}}{2} < 2^M \leq v^{2/3}$$

Si suponemos que $x \in (v - v^{1/3}, v + v^{1/3}]$, utilizamos el mismo argumento que para $J_v(x)$. El factor $\sin \theta$ hará que obtengamos más decaimiento e v .

$$\left| \int_0^\pi \sin \theta e^{\pm i(v\theta - x \sin \theta)} d\theta \right| \leq A v^{-2/3} \quad x \in (v - v^{1/3}, v + v^{1/3}]$$

Sea $x = v + a$ con $a \geq v^{1/3}$ y θ_0 es el punto donde se anula la derivada de la fase $\varphi(\theta) = v\theta - (v+a) \sin \theta$. Las integrales oscilatorias que aparecen en (1.25) las descomponemos en dos, la primera sobre un pequeño entorno de θ_0 y la segunda sobre el comple-

mentario de este entorno. En la primera no hay esperanza de cancelación y la mayoramos por la medida del intervalo. En la segunda, supuesto que no se anula la derivada de la fase, aprovechamos la cancelación integrando por partes. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (1.26) \quad & \left| \int_0^\pi \sin \theta e^{\pm i(v\theta - (v+a)\sin \theta)} d\theta \right| \leq \\
 & \leq \left| \int_{|\theta - \theta_0| < \lambda^{-\epsilon}} \sin \theta e^{\pm i(v\theta - (v+a)\sin \theta)} d\theta \right| + \left| \int_{\substack{|\theta - \theta_0| > \lambda^{-\epsilon} \\ \theta \in [0, \pi]}} \sin \theta e^{\pm i(v\theta - (v+a)\sin \theta)} d\theta \right| \leq \\
 & \leq 2 \sin \theta_0 \sin \lambda^{-\epsilon} + \frac{2 \sin(\theta_0 + \lambda^{-\epsilon})}{v - (v+a) \cos(\theta_0 + \lambda^{-\epsilon})} + \frac{2 \sin(\theta_0 - \lambda^{-\epsilon})}{(v+a) \cos(\theta_0 - \lambda^{-\epsilon}) - v}
 \end{aligned}$$

La mejor estimación se tendrá cuando estos tres sumandos mayores sean del mismo orden con respecto a v .

$$\begin{aligned}
 & (v + v^{1/3}, \infty) \subset \bigcup_{j=0}^{K-1} (v + 2^j v^{1/3}, v + 2^{j+1} v^{1/3}] \cup (2v, \infty) \\
 & \text{con } v^{2/3} < 2^K \leq 2v^{2/3}
 \end{aligned}$$

Si $x \in (v + 2^j v^{1/3}, v + 2^{j+1} v^{1/3}]$ el λ^ϵ óptimo es $2^{j/4} v^{1/3}$ ($\lambda^\epsilon > \theta_0$). Si $x \geq 2v$, $\lambda^\epsilon = x^{1/2}$.

Si sustituimos estos λ^ϵ en (1.26), utilizamos (1.24) para obtener también estimaciones superiores de $J_v(x)$ para $x \geq v + v^{1/3}$ y recapitulamos los resultados de esta sección, obtenemos:

x	$ J_v(x) \leq$	$ J'_v(x) \leq$
$0 \leq x \leq v/2$	$A v^{-1}$	$A v^{-1}$
$v - 2^{j+1} v^{1/3} < x \leq v - 2^j v^{1/3} \quad j \in \{0, 1, \dots, M-1\}$	$A 2^{-j} v^{-1/3}$	$A 2^{-j/2} v^{-2/3}$
$v - v^{1/3} < x \leq v + v^{1/3}$	$A v^{-1/3}$	$A v^{-2/3}$
$v + 2^j v^{1/3} < x \leq v + 2^{j+1} v^{1/3} \quad j \in \{0, 1, \dots, K-1\}$	$A 2^{-j/4} v^{-1/3}$	$A 2^{j/4} v^{-2/3}$
$x \geq 2v$	$A x^{-1/2}$	$A x^{-1/2}$

3- Espacios $B_p(\mathbb{R}^n)$ y $C_p^N(\mathbb{R}^n)$

Esta sección estará dedicada a estudiar los espacios en el marco de los cuales se presentaran los principales resultados de esta memoria.

Como una generalización natural en $L^p(\mathbb{R}^n)$ del espacio de las funciones banda-limitadas de $L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos:

$$B_p(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad / \quad \text{sop } \hat{f} \subset B(0,1) \}$$

Los $B_p(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Banach con la topología inducida por $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Si $f \in B_p(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$|f(x)| < A \|f\|_p$$

siendo A una constante dependiendo solamente de p y de la medida de la bola unidad en \mathbb{R}^n . De esto, es claro que si $p < p'$ entonces $B_p(\mathbb{R}^n)$ está incluido continuamente en $B_{p'}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{p'} \leq A \|f\|_p \quad f \in B_p(\mathbb{R}^n) \quad p < p' \quad A \text{ constante absoluta}$$

La inclusión es estricta. Para ver esto, consideramos $g(x) = g_0(|x|)$ donde $g_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$, $\text{sop } g_0 \subset [-1/2, 1/2]$ y $\hat{g}_0(0) = 1$. Definimos $f_\alpha(x) = h * |x|^{-\alpha}$ donde $h = |\hat{g}|^2$. Tal y como hemos definido f_α , es fácil ver que es acotada y que si $|x| \geq 2$ existen dos constantes A_1 y A_2 dependientes solamente de g_0 tal que $A_1 |x|^{-\alpha} \leq |f_\alpha(x)| \leq A_2 |x|^{-\alpha}$. Si $p < p'$ y tomamos α tal que $\frac{n}{p'} < \alpha < \frac{n}{p}$, entonces $f_\alpha \in B_{p'}(\mathbb{R}^n)$ pero no a $B_p(\mathbb{R}^n)$.

Va a ser cierto también que si $p < p'$, entonces $B_p(\mathbb{R}^n)$ se incluye densamente en $B_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Más generalmente:

Teorema 1.1 $B_1(\mathbb{R}^n)$ es denso en $B_p(\mathbb{R}^n)$ $p > 1$.

Demostración:

Sea $f \in B_p(\mathbb{R}^n)$. No hay restricción alguna en suponer que $\text{sop } \hat{f} \subset B(0, 1-\eta)$ para algún $\eta > 0$. Si no fuese así, consideraríamos $f^s(x) = f(\frac{x}{1+s})$. Para todo $s > 0$ $\text{sop } \hat{f}^s$ está contenido en $B(0, 1-\eta)$ para algún $\eta > 0$ y f^s converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $s \rightarrow 0$.

Sea $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sop } \hat{\varphi} \subset B(0, 1)$ y $\varphi(0) = 1$. Definimos para $r > 0$ $f_r(x) = f(x)\varphi(rx)$. Estas funciones están en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y para r suficientemente pequeño $\text{sop } \hat{f}_r \subset B(0, 1)$. Además f_r converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $r \rightarrow 0$. Intuitivamente esto es claro, pues si r es suficientemente pequeño, la continuidad de φ en el origen y el hecho de que $\varphi(0) = 1$, nos permite en cualquier entorno del origen hacer $\varphi_r(\varphi(rx))$ tan próxima a 1 como deseemos. Mas específicamente:

Dado $\epsilon > 0$, elegimos un $M > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x| > M} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2(1 + \|\varphi\|_\infty)}$$

Por la continuidad de φ en el origen, existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|\varphi(x) - 1| \leq \epsilon/2 \|f\|_p$. Si elegimos un r tal que $rM < \delta$, entonces $|\varphi_r(x) - 1| \leq \epsilon/2 \|f\|_p$ $|x| < M$ y:

$$\|f - f_r\|_p \leq \| (f - f_r) \chi_{B(0,M)} \|_p + \| (f - f_r) \chi_{B(0,M)^c} \|_p \leq$$

$$\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Es natural al estudiar espacios del tipo de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ preguntarse por sus duales. En nuestra situación, la conjetura sería la obvia: el dual de $B_p(\mathbb{R}^n)$ es $B_q(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ en el sentido estándar, esto es: dado $F \in B'_p(\mathbb{R}^n)$ existe una única $g \in B_q(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(f) = \langle f, g \rangle$ para $f \in B_p(\mathbb{R}^n)$ y

$$A_1 \|g\|_q \leq \|F\|_{B'_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_2 \|g\|_q$$

siendo A_1 y A_2 constantes absolutas.

Vamos a suponer que $n \neq 1$ y pensemos que la conjetura es cierta. Admitamos en un principio que $p < \frac{2n}{n-1}$. Sea $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y T el multiplicador de la bola unidad $((Tf)^\wedge(x) = \hat{f}(x) \chi_{B(0,1)}(x))$. Si $1/p + 1/q = 1$, entonces $q > \frac{2n}{n+1}$ y podemos asegurar que $T\varphi \in B_q(\mathbb{R}^n)$. Definimos:

$$\begin{aligned} F : B_p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow \langle f, T\varphi \rangle \end{aligned}$$

F es lineal y continuo. Como $|F(f)| = |\langle f, T\varphi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$

entonces $\|F\|_{B'_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_q$. Esto implica que $\|T\varphi\|_q \leq A \|\varphi\|_q$, pero esto es una contradicción si $q \neq 2$, pues es bien conocido que T es acotado solamente en $L^2(\mathbb{R}^n)$ ($n \neq 1$) [22].

Sea $p > \frac{2n}{n-1}$ y supongamos que $B'_p(\mathbb{R}^n) = B_q(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$. Como $B_p(\mathbb{R}^n)$ es cerrado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y este es reflexivo, $B_p(\mathbb{R}^n)$ también lo es y esto, implica que $B_p(\mathbb{R}^n) = B'_q(\mathbb{R}^n)$ con $q < \frac{2n}{n-1}$, lo cual contradice lo anterior.

Si $n=1$, la conjetura si es cierta para $1 < p < \infty$ y es una consecuencia de que el multiplicador de la bola unidad está acotado en $L^p(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$. En efecto, si $F \in B'_p(\mathbb{R})$ por el teorema de Hahn-Banach existe $g \in L^q(\mathbb{R})$ $1/p + 1/q = 1$ tal que $F(f) = \langle f, g \rangle$ para $f \in B_p(\mathbb{R})$ y $\|F\|_{B'_p(\mathbb{R})} = \|g\|_q$. Si T es el multiplicador de la bola unidad, $F(f) = \langle f, Tg \rangle$ para $f \in B_p(\mathbb{R})$. Como $\|Tg\|_q \leq A \|g\|_q$ y $\|F\|_{B'_p(\mathbb{R})} \leq \|Tg\|_q$, es claro que existirá una constante A tal que:

$$A \|Tg\|_q \leq \|F\|_{B'_p(\mathbb{R})} \leq \|Tg\|_q$$

lo cual demuestra que $B'_p(\mathbb{R}) = B_q(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$ $1/p + 1/q = 1$.

La descomposición de $L^2(\mathbb{R}^n)$ via los armónicos esféricos, nos va a inducir en $B_2(\mathbb{R}^n)$ una descomposición análoga. Sea $\{Y_{Nl}\}$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ una base ortonormal (en $L^2(S^{n-1})$) del conjunto de los armónicos esféricos superficiales de grado N , entonces cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ admite una representación en la L^2 -norma:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_N} Y_{Nl}(x') f_{Nl}(r) \quad x = rx' \quad |x|=r \quad x' \in S^{n-1}$$

donde

$$f_{Nl}(r) = \int_{S^{n-1}} f(rx') Y_{Nl}(x') dx'$$

Si suponemos que $\text{sop } \hat{f} \in B(0,1)$, entonces cualquiera que sea $N=0,1,2,\dots$ $1 \in \{1,2,\dots,a_N\}$ $\text{sop } (Y_{N1}(x') f_{N1}(r)) \hat{\in} B(0,1)$. Más específicamente, utilizando (1.3):

$$(Y_{N1}(y') f_{N1}(s)) \hat{(rx')} = 2\pi i^{-N} Y_{N1}(x') r^{-(n-2)/2} \chi_{[0,1]}(r).$$

$$\cdot \int_0^\infty f_{N1}(s) J_{N+(n-2)/2}(2\pi rs) s^{n/2} ds$$

Tendremos entonces una descomposición de $B_2(\mathbb{R}^n)$ via los armónicos esféricos:

$$B_2(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{N=0}^\infty \oplus C_2^N(\mathbb{R}^n) \quad C_2^N(\mathbb{R}^n) = B_2(\mathbb{R}^n) \cap \eta_2^N(\mathbb{R}^n)$$

Como una generalización natural en $B_p(\mathbb{R}^n)$ de los espacios $C_2^N(\mathbb{R}^n)$, definimos $C_p^N(\mathbb{R}^n) = B_p(\mathbb{R}^n) \cap \eta_p^N(\mathbb{R}^n)$, donde $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ está definido como $\eta_2^N(\mathbb{R}^n)$ pero con la condición de que sus elementos esten en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Es facil ver que las propiedades de los $B_p(\mathbb{R}^n)$ se transmiten a los $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ cualquiera que sea $N=0,1,\dots$

¿Quien es el dual de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$? Como antes conjeturariamos que es $C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$. Si $n=1$, la conjetura es cierta para $1 < p < \infty$ y es consecuencia, como en el caso de los $B_p(\mathbb{R})$, del hecho de que el multiplicador de la bola unidad está acotado en $\eta_p^N(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$. Si $n \neq 1$, como en el caso de los $B_p(\mathbb{R}^n)$, para que la conjetura fuese cierta tendria que ocurrir que el multiplicador de la bola unidad estuviese acotado en $\eta_q^N(\mathbb{R}^n)$.

Vamos a demostrar que el multiplicador de la bola unidad T , está acotado en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ $n \neq 1$ para el rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

Es facil ver que fuera de este rango de p 's, T no puede estar acotado. Sea $\varphi \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$ radial y vale 1 sobre la bola unidad. Si $p(x)$ es un armónico sólido de grado N ($p(x) = Y_N(x')$), donde

$Y_{N1}(x')$ es un armónico esférico superficial de grado N), definimos $\phi(x) = (p(y) \varphi(y) \hat{\gamma}(x))$. (1.3) y (1.11) nos aseguran que $\phi \in \mathcal{N}_p^N(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} T \phi(x) &= (p(y) \chi_{B(0,1)}(y)) (rx') = \\ &= 2\pi i^{-N} Y_N(x') r^{-(n-2)/2} \int_0^1 J_{N+(n-2)/2}(2\pi rs) s^{N+n/2} ds = \\ &= i^{-N} Y_N(x') r^{-n/2} J_{N+n/2}(2\pi r). \end{aligned}$$

Pero esta función (vease final de esta sección) esta en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $n \neq 1$ si y solamente si $p > \frac{2n}{n+1}$.

Para ver que está acotado en el rango de p 's antes indicado, utilizamos (1.3) y la siguiente igualdad para las funciones de Bessel:

$$(1.26) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = x \left\{ J_\nu(\alpha x) \frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx} - J_\nu(\beta x) \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx} \right\}$$

$(\alpha^2 \neq \beta^2)$ para obtener:

$$T(Y_N(x') f(r)) = \pi(-1)^{N+1} Y_N(x') r^{-(n-2)/2} \int_0^\infty f(s) K_\nu(r,s) s^{n/2} ds$$

donde $\nu = N + (n-2)/2$ y

$$\begin{aligned} K_\nu(r,s) &= \frac{J'_\nu(2\pi r) J_\nu(2\pi s)}{r-s} + \frac{J'_\nu(2\pi r) J_\nu(2\pi s)}{r+s} \\ &= \frac{J_\nu(2\pi r) J'_\nu(2\pi s)}{s-r} + \frac{J_\nu(2\pi r) J'_\nu(2\pi s)}{s+r} \end{aligned}$$

El estudio de la acotación de T puede ser hecho en los espacios $L^p(r^{n-1} \chi_{(0,\infty)}(r) dr)$. Si hacemos esto, los operadores que producen estos núcleos están tratados en lemas 2.3 y 2.4 del capítulo siguiente. En estos lemas, demostramos que estos operadores

están acotados (de hecho demostramos un resultado más fuerte, la acotación uniforme con respecto a ν) en el rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Llegamos entonces a:

Teorema 1.2 T (multiplicador de la bola unidad) está acotado

en $\mathcal{N}_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$.

Siguiendo el mismo razonamiento que utilizamos para ver que $B_p'(R) = B_q(R)$ $1/p + 1/q = 1$ $1 < p < \infty$, obtenemos:

Corolario 1.3. $C_p^N(\mathbb{R}^n)' = C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ si y solamente

si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$.

Es claro, después de la discusión que hemos ido haciendo hasta llegar a estos resultados, que teorema 1.2 y corolario 1.3 son equivalentes.

Para terminar la sección, vamos a determinar los p 's para los cuales $b_{Nl,k}(x)$ ($h_{Nl,k}(x)$) $\in C_p^N(\mathbb{R}^n)$. Para estos p 's determinaremos $\|h_{Nl,k}\|_p$.

Por la construcción que hicimos de las ondas esferoidales prolatas, la familia $\{b_{Nl,k}\}$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ forman un sistema ortonormal completo en $C_2^N(\mathbb{R}^n)$.

Las funciones $h_{Nl,k}(x)$ son de $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el soporte de su transformada de Fourier está contenido en la bola unidad. Más específicamente, utilizando (1.3) y (1.11):

$$\hat{h}_{Nl,k}(x) = i^N \sqrt{2(N+(n/2)+2k)} r^N P_k^{(N+(n-2)/2, 0)}(1-2r^2) \chi_{B(0,1)}(r) Y_{Nl}(x')$$

De esto, Parseval [23] y la relación de ortogonalidad que satis-

facen los polinomios de Jacobi [25], deducimos que para N fijo la familia $\{h_{Nl,k}\} \quad 1 \in \{1, 2, \dots, a_N\} \quad k=0, 1, \dots$ forman un sistema ortonormal completo en $C_2^N(\mathbb{R}^n)$.

En órden a estimar $\|h_{Nl,k}\|_p$, necesitamos el siguiente lema técnico:

Lema 1.4 . Si v es un número real positivo y $p > 1$, entonces :

$$\int_{v/2}^{2v} |J_v(x)|^p dx \approx v^{1/3 - p/3} \sum_{j=0}^{K-1} 2^j - pj/4 \quad v^{2/3} < 2^K \leq 2 v^{2/3}$$

Demostración:

Descomponiendo la integral segun el decaimiento de $J_v(x)$ en $[v/2, 2v]$ y aplicando los resultados obtenidos en sección 2 :

$$\int_{v/2}^{2v} |J_v(x)|^p \leq A v^{1/3 - p/3} \sum_{j=0}^{K-1} 2^j - jp/4$$

donde A , al igual que en lo que resta de sección, es una constante absoluta (independiente de v).

Para obtener una estimación inferior, escogemos un $m \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ que posteriormente determinaremos, y utilizamos la expresión asintótica para la función de Bessel (1.24) :

$$\begin{aligned} \int_{v/2}^{2v} |J_v(x)|^p dx &\geq \int_{v + 2^m v^{1/3}}^{v + 2^{K-1} v^{1/3}} |J_v(x)|^p dx = \\ &= \sum_{j=m}^{K-1} \int_{2^j v^{1/3}}^{2^{j+1} v^{1/3}} \left| \frac{\cos \theta(t)}{(2vt + t^2)^{1/4}} + h(v, t) \right|^p dt \\ &\geq v^{-p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{-jp/4} \int_{2^j v^{1/3}}^{2^{j+1} v^{1/3}} \left| \cos \theta(t) + (2vt + t^2)^{1/4} h(v, t) \right|^p dt = \oplus \\ &\quad \left| (2vt + t^2)^{1/4} h(v, t) \right| \leq A 2^{-3m/2} \quad t \in [2^m v^{1/3}, 2^K v^{1/3}] \end{aligned}$$

$\theta(t)$ y $\theta'(t)$ son crecientes ($\theta'(t) = \frac{(2vt + t^2)^{1/2}}{v + t}$). Hacemos $\theta(t) = s$

$$\textcircled{\#} \geq v^{1/3 - p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{-j(p/4 + 1/2)} \int_{\theta(2^j v^{1/3})}^{\theta(2^{j+1} v^{1/3})} |\cos s + g(s)|^p ds$$

donde $g(s) = (2v\theta^{-1}(s) + (\theta^{-1}(s))^2)^{1/4} h(\theta^{-1}(s), v)$.

Como $\theta(2^{j+1} v^{1/3}) - \theta(2^j v^{1/3}) > \theta'(2^j v^{1/3}) 2^j v^{1/3} > 2^{3j/2}$ y $|g(s)| < A 2^{-3m/2}$, escogiendo un v suficientemente grande y un $m \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ apropiado, siempre podemos asegurar que:

$$\begin{aligned} & \int_{\theta(2^j v^{1/3})}^{\theta(2^{j+1} v^{1/3})} |\cos s + g(s)|^p ds > A 2^{3j/2} \\ \text{y} \quad & \int_{v/2}^{2v} |J_v(x)|^p dx \geq A v^{1/3 - p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^j - pj/4. \end{aligned}$$

Esto junto con la estimación superior ya obtenida, demuestra el lema.

Si $n=1$, las $h_{N1k}(x)$ pueden ser expresadas en terminos de las funciones de Bessel esféricas $j_n(x)$ ($= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$):

$$N=0 \quad (l=1) \quad h_{01k}(x) = 2 \sqrt{2k+1/2} j_{2k}(2\pi x)$$

$$N=1 \quad (l=1) \quad h_{11k}(x) = 2 \sqrt{2k+3/2} j_{2k+1}(2\pi x)$$

Del comportamiento de la función de Bessel en el cero y en el infinito, es claro que $j_n(x) \in L^p(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$. De este, $h_{N1k} \in C_p^N(\mathbb{R})$ $N=0, 1, \dots$ $1 < p < \infty$.

$$\|j_n\|_p^p = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{p/2} \int_0^\infty \left| \frac{J_{n+1/2}(x)}{x^{1/2}} \right|^p dx$$

Si dividimos esta integral segun los conjuntos $(0, v/2)$, $(v/2, 2v)$, $(2v, \infty)$ y estimamos cada una de ellas utilizando los resultados de la sección 2 y lema 1.4, obtenemos:

$$(1.27) \quad \|j_n\|_p \approx \begin{cases} n^{-1+1/p} & \text{si } 1 < p < 4 \\ n^{-3/4} \log^{1/4} n & \text{si } p = 4 \\ n^{-5/6+1/3p} & \text{si } p > 4 \end{cases}$$

Lo cual nos estima $\|h_{N1,k}\|_p$ cuando $n=1$.

(En $(0, \nu/2)$ el comportamiento obtenido para $J_\nu(x)$ en sección 2 es obviamente insuficiente. Si utilizamos la expresión [27] :

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} \sin^{2\nu+1} \theta d\theta$$

y la formula de Stirling, es facil ver que para $x \leq \nu/2$ $J_\nu(x)$ tiene un decaimiento exponencial en ν)

Si $n \neq 1$:

$$\|h_{N1,k}\|_p^p = (N + (n/2) + 2k)^{p/2} \|Y_{N1}\|_{S^{n-1}}^p \int_0^\infty r^{n-1-pn/2} |J_{N+(n/2)+2k}(2\pi r)|^p dr$$

Si $r > 2\nu$ y utilizamos la formula asintótica para la función de Bessel (1.24) :

$$\begin{aligned} \int_{2\nu}^\infty r^{n-1-pn/2} |J_\nu(r)|^p dr &= \\ &= A \int_\nu^\infty (\nu+t)^{n-1-pn/2} \left| \frac{\cos \theta(t)}{(2\nu t + t^2)^{1/4}} + h(\nu, t) \right|^p dt = \textcircled{\#} \end{aligned}$$

Si $t \geq \nu$:

$$(\nu+t) \geq (2\nu t + t^2)^{1/2} \geq \theta(t) \geq (1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}) (2\nu t + t^2)^{1/2}$$

Si hacemos $\theta(t) = s$:

$$\textcircled{\#} \geq A \int_v^\infty \frac{s^{n-pn/2}}{s^{1+p/2}} |\cos s + g(s)|^p ds$$

donde $g(s) = (2v\theta^{-1}(s) + (\theta^{-1}(s)^2)^{1/4} h(v, \theta^{-1}(s)))$ y $|g(s)| < s^{-1/2}$

Esta última integral es divergente si $p \leq \frac{2n}{n+1}$. Por lo tanto, $h_{N1k}(x) \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si $p \leq \frac{2n}{n+1}$.

Si $p > \frac{2n}{n+1}$ y estimamos $\int_0^\infty r^{n-1-pn/2} |J_v(r)|^p dr$ dividiéndola en tres integrales según el comportamiento de $|J_v(r)|$ y estimamos cada una de ellas utilizando los resultados de la sección 2 y lema 1.4, obtenemos:

$$(1.28) \quad \|h_{N1k}\|_p \approx \|Y_{N1}\|_{L^p(S^{n-1})}^{(N+(n/2)+2k)^{n/p-n/2}}$$

Utilizando la expresión de $b_{N1k}(x)$ en términos de las $h_{N1k}(x)$, (1.28) ((1.27) si $n=1$) y el decaimiento de los coeficientes $d^N(k, j)$, deducimos que $b_{N1k}(x) \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si $p > \frac{2n}{n+1}$ $n \neq 1$, $p > 1$ si $n=1$.

$$b_{N1k}(x) = \frac{d^N(k, 0)}{u_{Nk}} h_{N1k}(x) + \sum_{\substack{j \neq 0 \\ j=-k}}^\infty \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{N1k+j}(x)$$

Si en los términos del sumatorio mayoramos $J_v(x)$ por $v^{1/6} x^{-1/2}$ en $(0, \infty)$ y en el término principal utilizamos el desarrollo asintótico de $J_v(x)$ (1.24), utilizando el decaimiento de los coeficientes $d^N(k, j)$ es fácil ver que $b_{N1k}(x)$, si k es suficientemente grande, no pertenece a $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si $p < \frac{2n}{n+1}$ $n \neq 1$.

CAPITULO II

CAPITULO II- L^p -CONVERGENCIA

El objetivo principal de este capítulo es demostrar:

Teorema 2.2 Sea $f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma_M f(x) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle f, b_{Nl,k} \rangle b_{Nl,k}(x)$.

Entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|\sigma_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y

solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$, $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Vimos en el capítulo anterior que las $b_{Nl,k}(x)$ eran esencialmente las $h_{Nl,k}(x)$ (por lo menos cuando k es grande). Esto nos sugiere descomponer σ_M en dos operadores:

$$S_M f(x) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{a_N} \langle f, h_{Nl,k} \rangle h_{Nl,k}(x)$$

$$T_M f(x) = \sigma_M f(x) - S_M f(x)$$

La familia de operadores $\{S_M\}_{M \in \mathbb{N}}$ son los operadores sumas parciales asociados al conjunto de funciones ortonormales en $C_2^N(\mathbb{R}^n)$ $h_{Nl,k}(x)$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$. Demostramos en la primera

sección de este capítulo :

Teorema 2.1 Sea $f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$

para toda f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$,

$4/3 < p < 4$ $n=1$.

Sobre los operadores $\{T_M\}_{M \in \mathbb{N}}$, demostraremos en la segunda sección de este capítulo que están uniformemente acotados en $\mathcal{H}_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$, $1 < p < \infty$ $n=1$. De esto y teorema 2.1 deduciremos teorema 2.2.

En la demostración de teoremas 2.1 y 2.2 haremos uso de algun resultado de la teoría de pesos. Esta teoría persigue la caracterización de funciones $w(x)$ y $u(x)$ medibles, no negativas y localmente integrables para las cuales se den desigualdades del tipo:

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x) dx$$

donde T es un operador sub-aditivo, A no depende de f y $1 \leq p < \infty$

Si T es el operador maximal de Hardy-Littlewood y $w(x) = u(x)$, una condición necesaria y suficiente para tener (2.1) ($1 < p < \infty$) es que $w(x)$ esté en la clase A_p , esto es :

$$\sup \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C$$

C constante absoluta (independiente de Q) y el supremo está tomado sobre todos los cubos de \mathbb{R}^n . La constante C y A de (2.1) son comparables.

Si T es un operador integral singular, la condición anterior

es necesaria. En el caso de la transformada de Hilbert (1-dimensional) o en cualquier transformada de Riesz (n-dimensional), la condición también es suficiente.

Será de especial interés para nosotros la caracterización del peso $w(x) = |x|^\alpha$ para la transformada de Hilbert:

$$(2.2) \quad |x|^\alpha \in A_p \text{ si y solamente si } -1 < \alpha < p-1$$

Este y los anteriores resultados pueden encontrarse en [10].

Cuando $w(x) \neq u(x)$ y T es un operador integral singular, no se conocen condiciones necesarias y suficientes sobre $u(x)$ y $w(x)$ para que se de (2.1). Si T es el operador maximal de Hardy-Littlewood, Sawyer[17] demostró que la siguiente condición era necesaria y suficiente: para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ debemos tener:

$$(2.3) \quad \int_Q [M(x_Q u^{1-q})(x)]^p w(x) dx \leq C \int_Q [u(x)]^{1-q} dx$$

donde C es independiente de Q y $1/p + 1/q = 1$. C y la constante A de (2.1) son comparables.

1- Demostración de teorema 2.1

Empezamos preguntandonos la razón por la cual p tiene que estar contenido en el intervalo $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$, $4/3 < p < 4$ $n=1$, en orden a tener la convergencia $\lim_{M \rightarrow \infty} \|S_M f - f\|_p = 0$ para toda f de $C_p^N(\mathbb{R}^n)$.

Si $n \neq 1$ la razón es clara, pues hemos deducido en sección 3 del capítulo I que $h_{N,k}(x) \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $p > \frac{2n}{n+1}$.

Si $n=1$ el razonamiento anterior no es válido, pues $h_{N1k} \in C_p^N(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$. Supongamos que $N=0$, entonces $h_{01k}(x) = 2\sqrt{2k+1/2} j_{2k}(2\pi x)$. Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 4(2k+1/2) \langle f, j_{2k}(2\pi \cdot) \rangle j_{2k}(2\pi x)$ converge para cada f de $C_p^0(\mathbb{R})$, una aplicación del teorema de Banach-Steinhaus junto con el hecho de que la norma del operador $T_k f = \langle f, j_{2k}(2\pi \cdot) \rangle$ en $C_p^0(\mathbb{R})$ está dada por $\|j_{2k}\|_q$ $1/p + 1/q = 1$, nos conduce a que $k \|j_{2k}\|_p \|j_{2k}\|_q = O(1)$. Pero según (1.27) esto solo puede ocurrir si $4/3 < p < 4$. Un razonamiento análogo cuando $N=1$, nos llevaría a la misma conclusión.

Para demostrar la convergencia en $C_p(\mathbb{R}^n)$ seguiremos las técnicas estándar, a saber: probaremos que las combinaciones lineales finitas de las $h_{N1k}(x)$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ son densas en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y que los operadores sumas parciales están uniformemente acotados. La primera parte es la fácil, el corazón de la demostración está en la segunda parte.

Si $p > 2$, la inclusión continua de $C_2^N(\mathbb{R}^n)$ en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ y la densidad de las combinaciones lineales finitas de las $h_{N1k}(x)$ en $C_2^N(\mathbb{R}^n)$ nos conduce al resultado.

Si $\frac{2n}{n+1} < p < 2$ si $n \neq 1$ $4/3 < p < 2$ si $n=1$ y suponemos que las combinaciones lineales finitas de las $h_{N1k}(x)$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ no son densas en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$, existirá un funcional lineal, continuo y no nulo T en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ tal que $T(h_{N1k}) = 0$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$. Como $(C_p^N(\mathbb{R}^n))' = C_q^N(\mathbb{R}^n)$ $1/p + 1/q = 1$ $2 < q < \frac{2n}{n+1}$ $n \neq 1$ $2 < q < 4$ $n=1$, existirá $g \in C_q^N(\mathbb{R}^n)$ tal que $T(f) = \langle f, g \rangle$ para $f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$. Si admitimos que los operadores sumas parciales están uniformemente acotados en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$, y por tanto que teorema 2.1 es cierto en el rango $2 \leq r < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $2 \leq r < 4$ $n=1$, llegamos a que $g=0$ o lo que es lo mismo que

$T=0$, lo cual supone una contradicción.

En la acotación uniforme de los operadores sumas parciales, no utilizaremos el hecho de que la transformada de Fourier está soportada en la bola unidad. Supondremos entonces que estos operadores están definidos en $\gamma_p^N(\mathbb{R}^n)$. Ya que cada función de $\gamma_p^N(\mathbb{R}^n)$ es una combinación de funciones de la forma $Y_{Nl}(x')f(r)$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$, será suficiente demostrar la acotación uniforme de los operadores para funciones de la forma $Y_{Nl}(x')f(r)$ $l \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ fijo.

Sea $Y_{Nl}(x')f(r) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$S_M(Y_{Nl}f) = \sum_{k=0}^M \langle Y_{Nl}f, h_{Nl,k} \rangle h_{Nl,k}(x) = Y_{Nl}(x') r^{n/2} \int_0^\infty K_M(r,s) s^{n/2-1} f(s) ds$$

donde:

$$K_M(r,s) = \sum_{k=0}^M (N+(n/2)+2k) J_{N+(n/2)+2k}(2\pi r) J_{N+(n/2)+2k}(2\pi s)$$

Vamos a obtener una expresión explícita para $K_M(r,s)$ via calcular:

$$S_{2M}^1(r,s) = \sum_{k=0}^{2M} (k+a) J_{k+a}(2\pi r) J_{k+a}(2\pi s)$$

$$S_{2M}^2(r,s) = \sum_{k=0}^{2M} (-1)^k (k+a) J_{k+a}(2\pi r) J_{k+a}(2\pi s)$$

Utilizando la igualdad [27] :

$$\frac{2v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)$$

obtenemos:

$$S_{2M}^1(r,s) = \frac{rs}{s-r} (J_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M}(2\pi s) - J_{a+2M}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s)) +$$

$$+ \pi \frac{rs}{s-r} (J_{a-1}(2\pi r) J_a(2\pi s) - J_a(2\pi r) J_{a-1}(2\pi s))$$

Si utilizamos ahora la igualdad:

$$2 S_{2M}^1(r, s) = S_{2M}^1(r, s) + S_{2M+1}^1(r, s) - (2M+1+a) J_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s)$$

y la relación [27] :

$$J'_v(r) = \frac{1}{2} (J_{v-1}(r) - J_{v+1}(r))$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{2M}^1(r, s) &= \pi \frac{rs}{r-s} J'_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s) + \pi \frac{sr}{s-r} J_{a+2M+1}(2\pi r) J'_{a+2M+1}(2\pi s) + \\ &+ \pi \frac{rs}{s-r} (J_{a-1}(2\pi r) J_a(2\pi s) - J_a(2\pi r) J_{a-1}(2\pi s)) - \frac{1}{2} (2M+1+a) J_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s) \end{aligned}$$

Análogamente obtendríamos:

$$\begin{aligned} S_{2M}^2(r, s) &= \pi \frac{rs}{r+s} J'_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s) + \pi \frac{rs}{r+s} J_{a+2M+1}(2\pi r) J'_{a+2M+1}(2\pi s) + \\ &+ \pi \frac{rs}{r+s} (J_{a-1}(2\pi r) J_a(2\pi s) + J_a(2\pi r) J_{a-1}(2\pi s)) + \frac{1}{2} (2M+1+a) J_{a+2M+1}(2\pi r) J_{a+2M+1}(2\pi s) \end{aligned}$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, si $[x]$ y $\{x\}$ designan la parte entera y fraccionari de x respectivamente, entonces

$$N + n/2 = 2[N/2 + n/4] + 2(N/2 + n/4)$$

Llamamos $q = [N/2 + n/4]$ y $a = 2(N/2 + n/4)$ y reescribimos $K_M(r, s)$ en terminos de q y a :

$$(2.4) \quad K_M(r, s) = \sum_{k=0}^M (2(k+q) + a) J_{2(k+q)+a}(2\pi r) J_{2(k+q)+a}(2\pi s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{M+q} (2k+a) J_{a+2k}(2\pi r) J_{a+2k}(2\pi s) - \sum_{k=0}^{M+q} (2k+a) J_{a+2k}(2\pi r) J_{a+2k}(2\pi s) = \\
&= \frac{1}{2} S_{2(M+q)}^1(r, s) + \frac{1}{2} S_{2(M+q)}^2(r, s) - \frac{1}{2} S_{2(q-1)}^1(r, s) - \frac{1}{2} S_{2(q-1)}^2(r, s) = \\
&= K_M^1(r, s) + K_M^1(s, r) + K_M^2(r, s) + K_M^2(s, r)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_M^1(r, s) &= \frac{\pi}{2} \frac{rs}{r-s} J'_{N+(n/2)+2M+1}(2\pi r) J_{N+(n/2)+2M+1}(2\pi s) - \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \frac{rs}{r-s} J'_{N+(n-2)/2}(2\pi r) J_{N+(n-2)/2}(2\pi s) \\
K_M^2(r, s) &= \frac{\pi}{2} \frac{rs}{r+s} J'_{N+(n/2)+2M+1}(2\pi r) J_{N+(n/2)+2M+1}(2\pi s) - \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \frac{rs}{r+s} J'_{N+(n-2)/2}(2\pi r) J_{N+(n-2)/2}(2\pi s)
\end{aligned}$$

Los operadores que producen los núcleos $K_M^1(r, s)$ y $K_M^1(s, r)$ (resp. $K_M^2(r, s)$ y $K_M^2(s, r)$) son duales, por lo tanto será suficiente estudiar la acotación uniforme de uno de ellos, por ejemplo el asociado a $K_M^1(r, s)$ (resp. $K_M^2(r, s)$).

Si $v \in \mathbb{R}$ y llamamos:

$$K_v^1(r, s) = \frac{rs}{r-s} J'_v(r) J_v(s)$$

$$K_v^2(r, s) = \frac{rs}{r+s} J'_v(r) J_v(s)$$

$K_M^1(r, s)$ ($K_M^2(r, s)$) es la diferencia, salvo normalización, de dos núcleos de la forma $K_v^1(r, s)$ (resp. $K_v^2(r, s)$).

Si designamos por S_v^i $i \in \{1, 2\}$ el operador asociado a $K_v^i(r, s)$ en el sentido:

$$S_v^i f(r) = r^{-n/2} \int_0^\infty K_v^i(r, s) s^{n/2-1} f(s) ds$$

vamos a demostrar en lemas 2.3 y 2.4 que estan uniformemente acotados (con respecto a v) en $L^p(r^{n-1} \chi_{(0,\infty)}(r)dr)$ en el rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$, lo cual es un resultado más fuerte que la acotación uniforme de los S_M en $\mathcal{V}_p^N(\mathbb{R}^n)$. Es claro, despues de lo anterior, que lemas 2.3 y 2.4 implican teorema 2.1.

Lema 2.3 Si $f \in L^p(r^{n-1} \chi_{(0,\infty)}(r)dr)$, entonces:

$$\|S_v^2 f\|_p \leq A \|f\|_p$$

A constante absoluta (independiente de v y f) y $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Demostración:

A designará a lo largo de toda la demostración una constante absoluta.

$$\begin{aligned} \|S_v^2 f\|_p^p &= \int_0^\infty r^{n-1} |S_v^2 f(r)|^p dr = \\ &= \int_0^\infty r^{n-1-pn/2} |J_v'(r)|^p \left| \int_0^\infty \frac{s^{n/2} J_v(s)}{r+s} f(s) ds \right|^p dr \end{aligned}$$

Segun los resultados del capítulo anterior, $|J_v'(r)| = |J_v'(-r)| \leq A |r|^{-1/2}$ $r \in \mathbb{R}$ y $|J_v(s)| \leq A s^{-1/2}$ $s \in (0, v/2) \cup (2v, \infty)$. Dividimos la integral en s en dos, una sobre $(v/2, 2v)$ y la otra sobre $(0, v/2) \cup (2v, \infty)$.

En la segunda integral vamos a utilizar teoría de pesos:

$$|r|^{n-1-(pn/2)+p} |J_v'(r)|^p \leq A r^{(n-1)(1-p/2)}$$

y segun (2.2) $|r|^{(n-1)(1-p/2)} \in A_p$ si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$. En este rango de p 's:

$$\int_0^\infty r^{n-1-(pn/2)+p} |J_v'(r)|^p \left| \int_{(0, v/2) \cup (2v, \infty)} \frac{s^{n/2} J_v(s)}{r+s} f(s) ds \right|^p dr \leq$$

$$\leq A \int_{-\infty}^0 |r|^{(n-1)(1-p/2)} |H(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{(0, v/2)}(2v; \infty)(s))(r)|^p dr \leq$$

$$\leq A \int_{(0, v/2) \cup (2v; \infty)} r^{(n-1)(1-p/2)} r^{np/2} |J_v(r)|^p |f(r)|^p dr \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr$$

Para estimar la primera integral, hacemos uso de la desigualdad de Holder y lema 1.4 para $4/3 < p < 4$ ($\int_{v/2}^{2v} |J_v(s)|^q ds \approx v^{1-q/2}$),

$$\int_0^\infty r^{n-1-(pn/2)+p} |J'_v(r)|^p \left| \int_{v/2}^{2v} \frac{s^{n/2} J_v(s)}{r+s} f(s) ds \right|^p dr \leq$$

$$\leq A v^{-n+p((n+1)/2)} \left(\int_0^\infty \frac{r^{n-1-p(n/2-1)} |J'_v(r)|^p}{(r+v)^p} dr \right) \left(\int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \right) = (\#)$$

Si mayoramos $|J'_v(r)|$ por $A r^{-1/2}$ y p está en el rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$.

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1-p(n/2-1)} |J'_v(r)|^p}{(r+v)^p} dr < A v^{n-p((n+1)/2)}$$

Lo cual nos anula el factor $v^{-n+p((n+1)/2)}$ en $(\#)$ y nos permite deducir el lema.

Lema 2.4 Si $f \in L^p(r^{n-1} \chi_{(0, \infty)}(r) dr)$, entonces:

$$\|S_v^1 f\|_p \leq A \|f\|_p$$

A constante absoluta (independiente de v y f) y $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Demostración:

Empezamos dando una idea general de la demostración para luego hacer los detalles.

Debido al comportamiento de $J_v(r)$ y $J'_v(r)$, lema 2.4 se reduce esencialmente a demostrar la desigualdad:

$$\# \int_{v+v^{1/3}}^{2v} r^{(n-1)+p(1-(n/2))} |J'_v(r)|^p \left| \int_{v+v^{1/3}}^{2v} \frac{s^{n/2} J_v(s)}{r-s} f(s) ds \right|^p dr \Big)^{1/p} \leq A \|f\|_p$$

con A constante absoluta y $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Dividimos $(v+v^{1/3}, 2v)$ en trozos diádicos $B_j = (v+2^j v^{1/3}, v+2^{j+1} v^{1/3})$. El tamaño de $r^{1/2} J_v(r)$ en estos trozos es cancelado por el de $r^{1/2} J'_v(r)$, por consiguiente un argumento usando la desigualdad de Minkowski nos conduciría a un crecimiento logarítmico en $\#$.

Para eliminar $\log v$ necesitamos un análisis más apropiado, a saber: la integración con respecto a la variable r es dividida en una suma de integrales, una por cada j . Para cada j fijo, dividimos la s -integración en tres partes correspondientes a los conjuntos

$\bigcup_{i < j-1} B_i$, $\bigcup_{i < j+1} B_i$ y $\bigcup_{j-1 < i < j+1} B_i$. La contribución de los dos últi-

mos terminos puede ser controlada por la acotación de la transformada de Hilbert con peso $r^{(n-1)(1-p/2)}$ ($\frac{2n}{n-1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$) y las estimaciones de las funciones $J_v(r)$ y $J'_v(r)$ obtenidas en la sección 2 del capítulo I. En $\bigcup_{i < j-1} B_i$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \left| r^{(n-1)+p(1-n/2)} |J'_v(r)|^p \left| H \left(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{\bigcup_{i < j-1} B_i} \right) (r) \right|^p \right. \\ & \leq A \left| r^{(n-1)+p(1-n/2)} |J'_v(r)|^p \left| M \left(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{(v+v^{1/3}, 2v)} \right) (r) \right|^p \right. \end{aligned}$$

donde H designa la transformada de Hilbert, M el operador maximal de Hardy-Littlewood y A una constante independiente de f y v . Estamos entonces en condiciones de usar la desigualdad con dos pesos obtenida por Sayer (2.3) para acabar la demostración.

Los detalles:

A designará a lo largo de toda la demostración una constante absoluta.

Dividimos $(0, \infty)$ segun el comportamiento de J_v y J'_v en tres

regiones:

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad 0 \leq x < v + v^{1/3}\}$$

$$R_2 = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad v + v^{1/3} \leq x < 2v\}$$

$$R_3 = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x \geq 2v\}$$

Si $f \in L^p(r^{n-1} \chi_{(0,\infty)}(r) dr)$:

$$\|S^2 f\|_p^p = \int_0^\infty r^{n-1-(np/2)+p} |J'_v(r)|^p |H(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{(0,\infty)}(s))(r)|^p dr$$

Definimos para $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$I_{ij}(f) = \int_{R_i} r^{n-1-(np/2)+p} |J'_v(r)|^p |H(s^{n/2} J_v(s) f(s) \chi_{R_j}(s))(r)|^p dr$$

y vamos a demostrar:

$$I_{ij}(f) \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

El trabajo estará en I_{22} , el resto serán más o menos consecuencias inmediatas de las estimaciones obtenidas para $J_v(r)$ y $J'_v(r)$ en el capítulo anterior.

I_{1j} $j \in \{1, 2, 3\}$ y I_{i3} $i \in \{1, 2, 3\}$ pueden ser mayorados por $A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr$ sin más que utilizar el comportamiento de $J_v(r)$ y $J'_v(r)$ en las correspondientes regiones R_i . No obstante, pueden ser estimadas más directamente utilizando la teoría de pesos. Veámoslo por ejemplo con I_{12} .

Si $r \in R_1$, $|J'_v(r)| \leq A r^{-2/3} \approx A v^{-1/6} r^{-1/2}$ y
 $r^{n-1-(pn/2)+p} |J'_v(r)|^p < A v^{-1/6} r^{(n-1)(1-p/2)}$. Según (2.2)

$r^{(n-1)(1-p/2)}$ pertenece a la clase A_p si y solamente si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$. En este rango de p 's y mayorando en R_2 $J_v(r)$ por $A v^{1/6} r^{-1/2}$, tenemos:

$$I_{12}(f) \leq A v^{-1/6} \int_{R_2} r^{(n-1)(1-p/2) + (np/2)} |J_v(r)|^p |f(r)|^p dr \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr$$

Para estimar $I_{31}(f)$, aprovechamos la ganancia que ofrece el cociente $\frac{1}{r-s}$. Si $r \in R_3$ y $s \in R_1$, $r-s > Ar$. Utilizando Holder:

$$\begin{aligned} I_{31}(f) &\leq A \int_{R_3} r^{(n-1)-p(n+1)/2} \left(\int_{R_1} s^{n/2} |J_v(s)| |f(s)| ds \right)^p dr \leq \\ &\leq A \left(\int_{R_1} (s^{(n-1)/q - (n/2)+1} |J_v(s)|)^q ds \right)^{p/q} \left(\int_{R_3} r^{n-1-p(n+1)/2} dr \right) \left(\int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \right) \end{aligned}$$

con $1/p + 1/q = 1$.

$$(2.5) \quad \int_{R_3} r^{(n-1)-p(n+1)/2} dr \leq A v^{n-p(n+1)/2} \quad p > \frac{2n}{n+1} \quad n \neq 1 \quad p > 1 \quad n=1$$

Si $4/3 < q < 4$ y utilizamos el comportamiento de $J_v(r)$ en R_1 :

$$(2.6) \quad \left(\int_{R_1} (s^{(n-1)/q - (n/2)+1} |J_v(s)|)^q ds \right)^{p/q} \leq A v^{(np/2) - n + 2/3}$$

De estas dos desigualdades se deduce:

$$I_{31}(f) \leq A v^{2/3-p/2} \left(\int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \right) \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr$$

para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

No hay restricción en suponer que el rango de integración de $I_{21}(f)$ empieza en $v+2v^{1/3}$ (dividimos I_{21} en dos integrales, la primera sobre $(v+v^{1/3}, v+2v^{1/3})$ y la segunda sobre $(v+2v^{1/3}, 2v)$). La primera la estimamos por el razonamiento de teoría de pesos antes expuesto). Dividimos diadicamente R_2 según los:

$$B_j = \{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad v+2^j v^{1/3} < x \leq v+2^{j+1} v^{1/3} \}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, K-1\} \quad (v^{2/3} < 2^K \leq 2v^{2/3}).$$

$$\text{Si } r \in B_j \text{ y } s \in R_1, \text{ entonces } r-s \geq 2^{j-1} v^{1/3}.$$

$$\begin{aligned} I_{21}(f) &\leq A v^{n-1-(pn/2)+p} \sum_{j=1}^{K-1} \int_{B_j} |J'_v(r)|^p \left| \int_{R_1} \frac{s^{n/2} J_v(s)}{r-s} f(s) ds \right|^p dr \leq \\ &\leq A v^{n-2/3-(pn/2)} \left(\sum_{j=1}^{K-1} \frac{2^{j(1+p/4)}}{2^{jp}} \right) \left(\int_{R_1} s^{n/2} |J_v(s)| |f(s)| ds \right)^p \leq \\ &\leq A v^{n-2/3-(pn/2)} \left(\sum_{j=1}^{K-1} \frac{2^{j(1+p/4)}}{2^{jp}} \right) \left(\int_{R_1} (s^{(n-1)/q-(n/2)+1} |J_v(s)|)^q ds \right)^{p/q} \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr. \end{aligned}$$

en la última desigualdad hemos aplicado Holder y $1/p + 1/q = 1$.

$$\text{Si } p > 4/3 \quad \sum_{j=1}^{K-1} \frac{2^{j(1+p/4)}}{2^{jp}} \text{ es como una constante absoluta.}$$

Esto y (2.6) ($4/3 < q < 4$) nos permite asegurar:

$$I_{21}(f) \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \quad 4/3 < p < 4 \quad \text{cualquiera que sea } n$$

Otra vez podemos suponer en I_{32} que $R_2 = (v+v^{1/3}, v+2^{K-2} v^{1/3})$ ($v^{2/3} < 2^K \leq 2v^{2/3}$). Si $r \in R_3$ y $s \in R_2$ $r-s \geq r/4$.

$$I_{32}(f) \leq A \left(\int_{R_3} r^{n-1-p(n+1)/2} dr \right) \left(\int_{R_2} s^{n/2} |J_v(s)| |f(s)| ds \right)^p$$

Aplicando Holder y lema 1.4

$$\left(\int_{R_2} s^{n/2} |J_v(s)| |f(s)| ds \right)^p \leq A v^{-n+p(n+1)/2} \quad p > 4/3 \quad \text{cualquiera que sea } n$$

De esto y (2.5) concluimos:

$$I_{32}(f) \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \quad \frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1} \quad n \neq 1 \quad 4/3 < p < 4 \quad n=1$$

Solamente nos queda estimar uniformemente $I_{22}(f)$. Si llamamos :

$$v_1(r) = r^{(n-1)/p - (n/2) + 1} |J'_v(r)|$$

$$v_2(r) = r^{(n-1)/q - (n/2) + 1} |J_v(r)|$$

y $g(r) = r^{(n-1)/p} |f(r)|$, tenemos que demostrar la desigualdad:

$$(2.7) \quad \| v_1 x_{R_2}^H (v_2 x_{R_2} g) \|_p \leq A \| g \|_p$$

o lo que es lo mismo:

$$\| v_1 x_{R_2}^H(g) \|_p < A \| v_2^{-1} x_{R_2} g \|_p$$

con A independiente de v y g , $g \in L^p(0, \infty)$ y $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$
 $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Esta desigualdad puede ser vista como una desigualdad con dos pesos para la transformada de Hilbert, a saber los pesos $w(r) = v_1^p(r) x_{R_2}(r)$ y $u(r) = v_2^{-p}(r) x_{R_2}(r)$. Ya hemos comentado al principio de este capítulo, que no hay un resultado general que pueda ser aplicado aquí. Sin embargo, si H es sustituido por M , si conocemos una condición necesaria y suficiente sobre $w(r)$ y $u(r)$ ((2.3)) para obtener una desigualdad del tipo:

$$(2.8) \quad \| v_1 x_{R_2}^M (v_2 x_{R_2} g) \|_p \leq A \| g \|_p$$

Para acabar la demostración, asumiremos primero que (2.8) resulta para $4/3 < p < 4$ y probaremos (2.7). Luego, por supuesto,

demostraremos (2.8).

No hay restricción en suponer que en $I_{22}(f)$ el rango de integración en la variable r es $(v+2^{2j}v^{1/3}, v+2^{K-2}v^{1/3})$ y en la variable s es $(v+v^{1/3}, v+2^Kv^{1/3})$ ($v^{2/3} < 2^K < 2v^{2/3}$). Si suponemos esto y como antes:

$$B_j = \{ r \in \mathbb{R} \quad / \quad v+2^jv^{1/3} < r \leq v+2^{j+1}v^{1/3} \} \quad j=0,1,\dots,K-1$$

tenemos:

$$\begin{aligned} I_{22}(f) &= \sum_{j=2}^{K-3} \int v_1^p x_{B_j} |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=0}^{j-2} B_i})|^p dr \leq \\ &\leq A \sum_{j=2}^{K-3} \int v_1^p x_{B_j} |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=0}^{j-2} B_i})|^p dr + A \sum_{j=2}^{K-3} \int v_1^p x_{B_j} |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i})|^p dr + \\ &+ A \sum_{j=2}^{K-3} \int v_1^p x_{B_j} |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j+2}^{K-1} B_i})|^p dr \end{aligned}$$

Para estimar el primer sumatorio, observamos que si $r \in B_j$ y $s \in \bigcup_{i=0}^{j-2} B_i$ entonces $r-s \geq 2^{j-2}v^{1/3}$. Ya que $\bigcup_{i=0}^{j-2} B_i \subset B(r, 2^jv^{1/3})$

y la medida de esta bola es como $2^jv^{1/3}$, la transformada de Hilbert quedará mayorada puntualmente por la función maximal $M(v_2 x_{R_2} g)$. Aplicando (2.8) obtenemos:

$$\sum_{j=2}^{K-3} \int v_1^p x_{B_j} |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=0}^{j-2} B_i})|^p dr \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \quad 4/3 < p < 4$$

En cada factor del segundo sumatorio, la perdida del orden de $v^{1/6}2^{-j/4}$ producida por $J_v(r)$ es cancelada por la ganancia producida por $J'_v(r)$. Ya que en B_j $v_1^p(r) \leq A 2^{pj/4} v^{-p/6} r^{(n-1)(1-p/2)}$ y si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$, $r^{(n-1)(1-p/2)}$ esta en la clase A_p , trabajando es este rango de p 's y mayorando $v_2^p(r)$

en $\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i$ por $A v^{p/6} 2^{-jp/4} r^{(n-1)(1/2-p)}$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{K-3} \int_{\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i} v_1^p |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i})|^p dr \leq \\ & \leq A \sum_{j=2}^{K-3} 2^{pj/4} v^{-p/6} \int_{\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i} r^{(n-1)(1-p/2)} v_2^p(r) |g(r)|^p dr \leq \\ & \leq A \sum_{j=2}^{K-3} \int_{\bigcup_{i=j-1}^{j+1} B_i} |g(r)|^p dr \leq A \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)|^p dr \end{aligned}$$

Para el tercer sumatorio, haciendo uso de la desigualdad

$$\left(\sum_i |a_i| \right)^p \leq A \sum_i 2^{pi/2} |a_i|^p$$

tenemos:

$$|H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j+2}^{K-1} B_i})(r)|^p \leq A \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2} |H(v_2 g x_{B_{j+i+2}})(r)|^p$$

Si $r \in B_j$ y $s \in B_{j+i+2}$ entonces $s-r \geq 2^{i+j} v^{1/3}$. Si hacemos uso de la desigualdad de Holder y utilizamos el comportamiento de J_v en B_{i+j+2} :

$$\begin{aligned} & |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j+2}^{K-1} B_i})(r)|^p \leq A \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2} (2^{i+j} v^{1/3})^{-p} \left| \int_{B_{j+i+2}} v_2(s) g(s) ds \right|^p \leq \\ & \leq A \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2} (2^{i+j} v^{1/3})^{-p} \left(\int_{B_{i+j+2}} v_2^q(r) dr \right)^{p/q} \|g x_{B_{i+j+2}}\|_p^p \leq \\ & \leq A v^{(np/2)+2/3-n-p/3} \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2-(i+j)(1+p/2)} \|g x_{B_{j+i+2}}\|_p^p \end{aligned}$$

Si utilizamos ahora el comportamiento de $J_v'(r)$ en B_j :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=2}^{K-3} \int_{B_j} v_1^p |H(v_2 g x_{\bigcup_{i=j+2}^{K-1} B_i})(r)|^p dr \leq \\
 & \leq A \sum_{j=2}^{K-3} 2^{j(1+p/4)} \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2 - (i+j)(1+p/4)} \|g x_{B_{i+j+2}}\|_p^p \leq \\
 & \leq A \sum_{j=2}^{K-3} \sum_{i=0}^{K-j+1} 2^{pi/2 - i(1+p/4)} \|g x_{B_{i+j+2}}\|_p^p \leq \\
 & \leq A \|g\|_p^p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{pi/2 - i(1+p/4)} \leq A \int_0^{\infty} r^{n-1} |f(r)|^p dr
 \end{aligned}$$

siempre que $p < 4$, cualquiera que sea n .

Solamente nos resta para concluir la acotación uniforme de $I_{22}(f)$ la demostración de (2.8) y que ahora vemos:

Lema 2.5 Sea $w(x) = v_1^p(x) x_{R_2}(x)$ y $u(x) = v_2^{-p}(x) x_{R_2}(x)$, donde:

$$v_1(x) = x^{(n-1)/p - (n/2) + 1} |J_v'(x)|$$

$$v_2(x) = x^{(n-1)/q - (n/2) + 1} |J_v(x)|$$

y $R_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid v + v^{1/3} < x \leq 2v\}$. Entonces

$$(2.9) \quad \left(\int [Mg(x)]^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq A \left(\int |g(x)|^p u(x) dx \right)^{1/p}$$

M el operador maximal de Hardy-Littlewood, A constante absoluta (independiente de v) y $4/3 < p < 4$.

Demostración:

(2.9) es equivalente a demostrar la condición de Sawyer (2.3).

En nuestro caso, esta se traduce en: dado cualquier intervalo

$I \subset \mathbb{R}_2$ se tiene que verificar:

$$\int_I |M(\chi_I v_2^q)(x)|^p v_1^p dx \leq C \int_I v_2^q dx$$

C no depende de I y $1/p + 1/q = 1$. Ya que la constante A de (2.9) es comparable con C, tendremos que demostrar que esta no depende de v .

Sea

$$B_j = \{x \in \mathbb{R} \mid v+2^j v^{1/3} < x \leq v+2^{j+1} v^{1/3}\}$$

$$j=0,1,\dots,K-1 \quad y \quad v^{2/3} < 2^K \leq 2v^{2/3}$$

Si $x \in B_j$, usando las estimaciones para $J_v(x)$ en B_i y siendo A una constante absoluta (independiente de v)

$$\begin{aligned} M(\chi_I v_2^q)(x) &\leq A v^{n-1-(nq/2)+(2q/3)} \sum_{i=0}^{K-1} 2^{-qi/4} M \chi_{B_i}(x) \leq \\ &\leq A v^{n-1-(nq/2)-(2q/3)} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} 2^{-qi/4} M \chi_{B_i}(x) + 2^{-qi/4} M \chi_{B_j}(x) + \sum_{i=j+1}^{K-1} 2^{-qi/4} M \chi_{B_i}(x) \right\} \leq \\ &\leq A v^{n-1-(nq/2)-(2q/3)} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} 2^{-qi/4} 2^{i-j} + 2^{-qi/4} + \sum_{i=j+1}^{K-1} 2^{-qi/4} \right\} \leq \\ &\leq A v^{n-1-(nq/2)-(2q/3)} 2^{-qj/2} \quad (q < 4) \end{aligned}$$

Ahora usamos las estimaciones para $J'_v(x)$ en B_j y sin perdida de generalidad podemos asumir:

$$(v+2^{n+1} v^{1/3}, v+2^{m-1} v^{1/3}) \subset I \subset (v+2^n v^{1/3}, v+2^m v^{1/3})$$

$n, m=0,1,\dots,K-1$, $m-n > 2$ (si $m-n \leq 2$, la acotación en $L^p(\mathbb{R})$

$1 < p < \infty$ del operador maximal junto con el hecho de que $v_1 v_2 \leq A$ en cualquier B_j , nos conduce a la condición de Sawyer).

$$\int_I |M(\chi_I v_2^q)(x)|^p v_1^p(x) dx \leq$$

$$\leq A v^{n-1 - (np/2) + p/3} \sum_{j=n}^{m-1} 2^{jp/4} \int_{B_j} |M(x_I v_2^q)|^p dx \leq$$

$$\leq A v^{(n-2/3) - (n/2 - 2/3)q} \sum_{j=n}^{m-1} 2^{j(1-q/4)} \approx A v^{(n-2/3) - (n/2 - 2/3)q} 2^{m(1-q/4)}$$

Utilizando las mismas tecnicas que usamos en la demostración de lema 1.4, es facil ver que :

$$\int_I v_2^q dx \approx A v^{(n-2/3) - (n/2 - 2/3)q} 2^{m(1-q/4)}$$

de lo cual deducimos el lema.

2- Demostración de teorema 2.2

Otra vez seguiremos las tecnicas estandar para estudiar la convergencia en el rango de p's descrito. La densidad de las combinaciones lineales finitas de las $b_{N,l,k}(x)$ $1 \in \{1,2,\dots,a_N\}$ $k=0,1,\dots$ en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ sigue el mismo razonamiento que para las $h_{N,l,k}(x)$, siempre que demostremos la acotación uniforme de los operadores σ_M en $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{V}_p^N(\mathbb{R}^n)$) $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$.

Ya que:

$$\sigma_M = S_M + (\sigma_M - S_M) = S_M + T_M$$

la acotación uniforme de los operadores σ_M la vamos a obtener via estudiar la acotación uniforme de los T_M . Despues de la sección anterior tendremos que demostrar que:

$$(2.10) \quad \|T_M f\|_p \leq A \|f\|_p$$

$f \in C_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$ y A constante absoluta (independiente de M).

Lo anterior nos conduciría a teorema 2.2 si $n \neq 1$, pues fuera del rango $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ las $b_{N1k}(x)$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ $k=0, 1, \dots$ no pueden formar una base por no pertenecer a $C_p^N(\mathbb{R}^n)$ $p > \frac{2n}{n+1}$. Si $n=1$, esto no es válido. Demostraremos para $n=1$ que (2.10) es válido para $1 < p < \infty$ y esto implicará, después de sección 1, teorema 2.2.

Como para los operadores S_M , será suficiente estudiar la acotación uniforme de los T_M para funciones de la forma $Y_{N1}(x')f(r)$ $1 \in \{1, 2, \dots, a_N\}$ fijo.

Sea $R_M(x, y)$ el núcleo asociado al operador T_M :

$$R_M(x, y) = \sum_{k=0}^M b_{N1k}(x) b_{N1k}(y) - \sum_{k=0}^M h_{N1k}(x) h_{N1k}(y)$$

Recordando la expresión de $b_{N1k}(x)$ como una serie en las funciones $h_{N1j}(x)$:

$$b_{N1k}(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{N1k+j}(x)$$

$R_M(x, y)$ puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} R_M(x, y) = & \sum_{k=0}^M \left(\frac{[d^N(k, j)]^2}{u_{Nk}} - 1 \right) h_{N1k}(x) h_{N1k}(y) + \\ & + \sum_{k=0}^M \frac{d^N(k, 0)}{u_{Nk}} h_{N1k}(x) \left(\sum_{\substack{i=-k \\ i \notin \{-1, 0, 1\}}}^{\infty} \frac{d^N(k, i)}{u_{Nk}} h_{N1k+i}(y) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^M \frac{d^N(k, 0)}{u_{Nk}} h_{N1k}(y) \left(\sum_{\substack{j=-k \\ j \notin \{-1, 0, 1\}}}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{N1k+j}(x) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^M \left(\sum_{\substack{j \neq 0 \\ j=-k}}^{\infty} \frac{d^N(k, j)}{u_{Nk}} h_{N1k+j}(x) \right) \left(\sum_{\substack{i \neq 0 \\ i=-k}}^{\infty} \frac{d^N(k, i)}{u_{Nk}} h_{N1k+i}(y) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^M \frac{d^N(k,0) d^N(k,-1)}{u_{Nk}^2} (h_{N1k}(x) h_{N1k-1}(y) + h_{N1k-1}(x) h_{N1k}(y)) + \\
& + \sum_{k=0}^M \frac{d^N(k,0) d^N(k,1)}{u_{Nk}^2} (h_{N1k}(x) h_{N1k+1}(y) + h_{N1k+1}(x) h_{N1k}(y)) = \\
& = \sum_{k=0}^M R_N^i(x,y)
\end{aligned}$$

El estudio de la acotación de los operadores que producen los núcleos $R_N^i(x,y)$, va a depender esencialmente del comportamiento de los coeficientes estudiado en capítulo I. Supuesto que las estimaciones de los $d^N(k,j)$ las hemos obtenido para K mayor o igual que un cierto $K(c)$, vamos a suponer, lo cual no impone ninguna restricción, que todos los sumatorios que aparecen en la descomposición de $R_M(x,y)$ empiezan en $K(c)$.

Los operadores asociados a los cuatro primeros núcleos serán fáciles de estudiar, debido al decaimiento de los $d^N(k,j)$. El trabajo se presentará en el estudio de los dos últimos.

Designamos por T_M^i el operador asociado a $R_M^i(x,y)$ $i \in \{1,2,\dots,6\}$. Como en la sección anterior, no utilizaremos el hecho de que la transformada de Fourier esté soportada en la bola unidad. Supondremos entonces definidos los T_M^i en $\gamma_p^N(\mathbb{R}^n)$.

De (1.28) :

$$(2.11) \quad \|h_{N1k}\|_p \|h_{N1k}\|_q = O(1)$$

$$\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1} \quad n \neq 1 \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Si $n=1$, utilizando (1.27)

$$(2.12) \quad \|h_{N1k}\|_p \|h_{N1k}\|_q = O(k^{1/6}) \quad 1 < p < \infty \quad 1/p + 1/q = 1$$

Puesto que:

$$(2.13) \quad \left| \frac{[d^N(k,0)]^2}{u_{Nk}^2} - 1 \right| \leq \frac{A}{(N+k)^2} \quad k \geq K(c)$$

(esto es una consecuencia inmediata de (1.21)) siendo A, como a largo de lo que resta de sección, una constante que solamente depende de c, deducimos:

$$\|T_M^1 f\|_p \leq A \|f\|_p \quad \frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1} \quad n \neq 1 \quad 1 < p < \infty \quad n=1$$

Para los operadores $T_M^i \quad i \in \{2,3,4\}$ tenemos:

$$\|T_M^2 f\|_p \leq A \|f\|_p \sum_{k=K(c)}^M \frac{|d^N(k,0)|}{u_{Nk}^2} \|h_{N1k}\|_p \left(\sum_{\substack{i=-k \\ i \notin \{-1,0,1\}}}^{\infty} |d^N(k,i)| \|h_{N1k+i}\|_q \right)$$

$$\|T_M^3 f\|_p \leq A \|f\|_p \sum_{k=K(c)}^M \frac{|d^N(k,0)|}{u_{Nk}^2} \|h_{N1k}\|_q \left(\sum_{\substack{j=-k \\ j \notin \{-1,0,1\}}}^{\infty} |d^N(k,j)| \|h_{N1k+j}\|_p \right)$$

$$\|T_M^4 f\|_p \leq A \|f\|_p \sum_{k=K(c)}^M \frac{1}{u_{Nk}^2} \left(\sum_{\substack{i \neq 0 \\ i=-k}}^{\infty} |d^N(k,i)| \|h_{N1k+i}\|_q \right) \left(\sum_{\substack{j \neq 0 \\ j=-k}}^{\infty} |d^N(k,j)| \|h_{N1k+j}\|_p \right)$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

Si utilizamos el decaimiento de los $d^N(k,j)$ (1.20) y el comportamiento de $\|h_{N1k}\|_p$ (1.28) ((1.27) si $n=1$), mayoramos por una constante absoluta los sumatorios que controlan $\|T_M^i f\|_p$ $i \in \{2,3,4\}$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1} \quad n \neq 1 \quad 1 < p < \infty \quad n=1$.

Por último estudiaremos T_M^6 (el estudio de T_M^5 es análogo). Necesitaremos el siguiente lema, que demostraremos al final.

Lema 2.6 Si $P_M(x,y) = \sum_{k=0}^M (h_{N1k}(x) h_{N1k+1}(y) + h_{N1k+1}(x) h_{N1k}(y))$, entonces:

$$\left(\int_{R^n} \left| \int_{R^n} P_M(x,y) f(y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq A \log M \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

para $f \in \bigcap_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$ y A constante absoluta (independiente de M)

Para $n=1$ podemos obtener una desigualdad para $1 < p < \infty$, pero con constante del orden de $M^{1/6}$.

De (1.8) :

$$f^N(k,1,c) d^N(k,1) = A^N(k+2) d^N(k,2) + A^N(k+1) d^N(k,0)$$

y esto nos permite descomponer $R_M^6(x,y)$ en dos núcleos:

$$R_M^{6,1}(x,y) = \sum_{k=K(c)}^M \frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} \frac{d^N(k,0)d^N(k,2)}{u_{Nk}^2} (h_{N1k}(x) h_{N1k+1}(y) + h_{N1k+1}(x) h_{N1k}(y))$$

$$R_M^{6,2}(x,y) = \sum_{k=K(c)}^M \frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} \frac{[d^N(k,0)]^2}{u_{Nk}^2} (h_{N1k}(x) h_{N1k+1}(y) + h_{N1k+1}(x) h_{N1k}(y))$$

El $T_M^{6,1}$, operador asociado a $R_M^{6,1}(x,y)$, esta controlado por

$$\|T_M^{6,1}f\|_p \leq A \|f\|_p \sum_{k=K(c)}^M \left| \frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} \frac{d^N(k,0)d^N(k,2)}{u_{Nk}^2} \right| \cdot (\|h_{N1k}\|_p \|h_{N1k+1}\|_q + \|h_{N1k+1}\|_p \|h_{N1k}\|_q)$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

Utilizando el decaimiento de $d^N(k,2)$ (1.21), (2.11) y (2.12) :

$$\|T_M^{6,1}f\|_p \leq A \|f\|_p \quad \frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1} \quad n \neq 1 \quad 1 < p < \infty \quad n=1$$

$R_M^{6,2}$ vamos a volver a descomponerlo, esta vez aplicando su-
mación por partes:

$$R_M^{6,1}(x,y) = \sum_{k=K(c)}^{M-1} \left(\frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} \frac{[d^N(k,0)]^2}{u_{Nk}^2} - \frac{A^N(k+2)}{f^N(k+1,1,c)} \frac{[d^N(k+1,0)]^2}{u_{Nk+1}^2} \right) Q_k(x,y) + \\ + \frac{A^N(M+1)}{f^N(M,1,c)} \frac{[d^N(M,0)]^2}{u_{NM}^2} Q_M(x,y)$$

donde $Q_k(x,y) = P_k(x,y) - P_{K(c)-1}(x,y)$ $k \geq K(c)$

De (1.17), (1.21) y lema 2.6, el último núcleo produce operadores uniformemente acotados para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$
 $1 < p < \infty$ $n=1$.

El primer núcleo en la descomposición de $R_M^{6,1}(x,y)$ lo dividimos en:

$$\sum_{k=K(c)}^{M-1} \frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} \left(\frac{[d^N(k,0)]^2}{u_{Nk}^2} - \frac{[d^N(k+1,0)]^2}{u_{Nk+1}^2} \right) Q_k(x,y) + \\ + \sum_{k=K(c)}^{M-1} \left(\frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} - \frac{A^N(k+2)}{f^N(k+1,1,c)} \right) \frac{[d^N(k+1,0)]^2}{u_{Nk+1}^2} Q_k(x,y)$$

De (1.21) :

$$\left(\frac{[d^N(k,0)]^2}{u_{Nk}^2} - \frac{[d^N(k+1,0)]^2}{u_{Nk+1}^2} \right) = O((N+k)^{-2})$$

La definición de $f^N(k,1,c)$ y $A^N(k)$ junto con (1.16) y (1.17) también nos permite asegurar que:

$$\left(\frac{A^N(k+1)}{f^N(k,1,c)} - \frac{A^N(k+2)}{f^N(k+1,1,c)} \right) = O((N+k)^{-2})$$

Estos dos hechos junto con lema 2.6, implica que los operadores producidos por los dos últimos núcleos están uniformemente acotados en $\mathcal{Y}_p^N(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$.

Solamente nos queda para terminar la demostración de teorema 2.2, demostrar lema 2.6.

Demostración de lema 2.6

Sea $m = N + (n-2)/2$. De la relación [27] :

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} P_M(x,y) &= \frac{1}{2\pi^2} (|x|^{-2} + |y|^{-2}) \sum_{k=1}^M (2m+2k+1)^2 h_{N1k}(x) h_{N1k}(y) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \left(2 - \frac{(m+2k+3)^2 + (m+2k+1)^2}{(m+2k+2)\sqrt{m+2k+1}\sqrt{m+2k+3}} \right) (h_{N1k}(x) h_{N1k+1}(y) + h_{N1k+1}(x) h_{N1k}(y)) - \\ &- \sum_{k=1}^M \left(\frac{m+2k+1}{m+2k} + \frac{m+2k+1}{m+2k+3} \right) h_{N1k}(x) h_{N1k}(y) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(m+2M+3)^2}{(m+2M+2)\sqrt{m+2M+1}\sqrt{m+2M+3}} (h_{N1M}(x) h_{N1M+1}(y) + h_{N1M+1}(x) h_{N1M}(y)) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(m+1)^2}{(m+2)\sqrt{m+1}\sqrt{m+3}} (h_{N10}(x) h_{N11}(y) + h_{N11}(x) h_{N10}(y)) \end{aligned}$$

$$\text{Ya que } \left(2 - \frac{(m+2k+3)^2 + (m+2k+1)^2}{(m+2k+2)\sqrt{m+2k+1}\sqrt{m+2k+3}} \right) = O((m+k)^{-2}), \quad (2.11) \text{ y}$$

(2.12) nos aseguran que el segundo núcleo produce un operador uniformemente acotado en $\mathcal{V}_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $1 < p < \infty$ $n=1$.

El tercer núcleo, produce un operador que es esencialmente el M-esimo operador suma parcial asociado a la familia $\{h_{N1k}\}$ $k=0,1,\dots$. Sabemos que estos están uniformemente acotados en $\mathcal{V}_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$. Cuando $n=1$, podemos obtener acotación para $1 < p < \infty$ pero con norma del orden de $M^{1/6}$.

Para los dos últimos núcleos, utilizando (2.11) y (2.12) obtenemos acotación uniforme de los operadores asociados a ellos para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ y para $n=1$, acotación con norma del orden de $M^{1/6}$ para $1 < p < \infty$.

Solamente queda para deducir el lema, demostrar que el operador asociado al primer núcleo está acotado para el rango de p 's que estamos trabajando, con norma del orden de $\log M$ $n \neq 1$ y $M^{1/6}$ $n=1$.

Utilizando sumación por partes y (2.4) obtenemos:

$$(r^{-2} + s^{-2}) \sum_{k=0}^M (m+2k+1)^3 J_{m+2k+1}(2\pi r) J_{m+2k+1}(2\pi s) = \sum_{i=1}^4 K_i(r,s) + K_i(s,r)$$

donde:

$$K_1(r,s) = -4\pi (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r-s} \sum_{k=0}^M (m+2k) J'_{m+2k}(2\pi r) J_{m+2k}(2\pi s)$$

$$K_2(r,s) = -4\pi (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r+s} \sum_{k=0}^M (m+2k) J'_{m+2k}(2\pi r) J_{m+2k}(2\pi s)$$

$$K_3(r,s) = \pi(m+2M+1)^2 (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r-s} J'_{m+2M+2}(2\pi r) J_{m+2M+2}(2\pi s) - \\ - \pi(m-1)^2 (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r-s} J'_m(2\pi r) J_m(2\pi s)$$

$$K_4(r,s) = \pi(m+2M+1)^2 (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r+s} J'_{m+2M+2}(2\pi r) J_{m+2M+2}(2\pi s) - \\ - \pi(m-1)^2 (r^{-2} + s^{-2}) \frac{rs}{r+s} J'_m(2\pi r) J_m(2\pi s)$$

De esto :

$$(|x|^{-2} + |y|^{-2}) \sum_{k=0}^M (m+2k+1)^2 h_{N1k}(x) h_{N1k}(y) = \sum_{i=1}^4 P_i(x,y) + P_i(y,x)$$

$$P_i(x,y) = \frac{Y_{N1}(x') Y_{N1}(y')}{r^{n/2} s^{n/2}} K_i(r,s)$$

con $x=rx'$ $y=sy'$ $|x|=r$ $|y|=s$ $x',y' \in S^{n-1}$.

El estudio de los operadores asociados a los $P_i(x,y)$ se reduce a estudiar en $L^p(r^{n-1} \chi_{(0,\infty)}(r)dr)$ la acotación de los operadores:

$$\# \quad r^{-n/2} \int_0^\infty K_i(r,s) s^{n/2-1} f(s) ds \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

Los $K_i(r,s)$ vienen expresados en términos de núcleos del tipo:

$$r^{-2} \frac{rs}{r \pm s} J'_\nu(r) J_\nu(s) \quad s^{-2} \frac{rs}{r \pm s} J'_\nu(r) J_\nu(s)$$

y sus duales, $\nu = m+2k$ $k=0,1,\dots$. Estos núcleos, esencialmente se comportan como $\nu^{-2} \frac{rs}{r \pm s} J'_\nu(r) J_\nu(s)$ y los operadores, en el sentido de $\#$, asociados a estos núcleos están estudiados en lemas 2.3 y 2.4. Si aplicamos estos lemas, los operadores asociados a los $P_i(x,y)$ están acotados en $\eta_p^N(\mathbb{R}^n)$ $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ $n \neq 1$ $4/3 < p < 4$ $n=1$ con norma del orden de $\log M$ $i=1,2$ y uniformemente para $i=3,4$.

Para $n=1$, la acotación de la transformada de Hilbert en $L^p(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$ y las estimaciones $|J'_\nu(r)| \leq A r^{-1/2}$ $|J_\nu(r)| \leq A \nu^{1/6} r^{-1/2}$ A constante absoluta, producen la acotación de los operadores, en el sentido de $\#$, asociados a $\frac{rs}{r \pm s} J'_\nu(r) J_\nu(s)$ con norma del orden $\nu^{1/6}$. Esto nos asegura que los operadores asociados a los $P_i(x,y)$ están acotados en $\eta_p^N(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$ con norma del orden de $M^{1/6}$.

BIBLIOGRAFIA

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Abramowitz, H. y Stegun, I. A. (Editores)- Hand book of mathematical functions. Dover publications, New York (1972).
- [2] Askey, A. y Wainger, S. - Mean convergence of expansion in Laguerre and Hermite series. Am. J. Math. 87 (1965) 695-708.
- [3] Barceló, J. A. y Córdoba, A. - Band-limited functions: L^p -convergence. Bull. A.M.S. (1988).
- [4] Barceló, J. A. y Córdoba, A. - Band-limited functions: L^p -convergence. Por aparecer.
- [5] Bonami, A. y Clerc, J. L. - Sommes de Cesàro et multiplicateurs des developpements en harmoniques spheriques. - Tram. A.M.S. 183 (1973).
- [6] Córdoba, A. - The disc multiplier. Por aparecer.
- [7] Courant, R. y Hilbert, D. - Methods of mathematical physics. Vol.I .Interscience (1953).
- [8] Dym, H. y McKean, H. P. - Fourier series and integrals. Academic Press. New York (1972).
- [9] Flamer, C. - Spherical wave functions . Stanford Univ. Pres. Stanford C. A. (1957).
- [10] Garcia-Cuerva, J. y Rubio de Francia, J. L. -Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland. Ansterdan (1985).

- [11] Landau, H. L. y Pollak, H. O. - Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty II. Bell Syst. Tech. J. 40 (1961) 65-84.
- [12] Landau, H. L. y Pollak, H. O. - Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty III. Bell Syst. Tech. J. 41 (1962) 1295-1335.
- [13] Muckenhoupt, B. - Mean convergence of Jacobi series. Proc. A.M.S. 23 (1969) 306-310.
- [14] Newman, J. y Rudin, W. - On mean convergence of orthogonal series. Proc. A.M.S. 3 (1952) 219-222.
- [15] Pollard, H. P. - The mean convergence of orthogonal series I. Trans. A.M.S. 62 (1947) 387-403.
- [16] Riesz, F. y Nagy, Sz. - Functional analysis. Frederick Ungar CO New York (1959).
- [17] Sawyer, E. T. - A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators. Studia Math. T-LXXV (1982) 1-11.
- [18] Slepian, D. y Pollak, H. O. - Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty I. Bell Syst. Tech. J. 40 (1961) 43-64.
- [19] Slepian, D. - Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty IV. Extension to many dimension, generalized prolate spheroidal wave functions. Bell Syst. Tech. J. (1964) 3009-3057.
- [20] Slepian, D. - On bandwidth. Proc. IEEE 64 (1976) 292-300.

- [21] Slepian, D. - Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling. Sian Review V. 25 N. 3 (1985) 379-393.
- [22] Stein, E. M. - Singular integrals and differentiability properties of functions. Pricenton (1970).
- [23] Stein, E. M. y Weiss, W. - Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Pricenton (1971).
- [24] Stratton, J. A., Morse, P. M., Chu, L. J., Little, J. D. y Corbato, F. J. - Spherical wave functions. The technology Press of M.I.T. Cambridge , N. York (1956).
- [25] Szegő, G. - Ortogonal polinimial. A.M.S. Colloq. Publ. V 23 Trird edition (1967).
- [26] Vo-Khac Khoan - Distributons analyse de Fourier operateur aux derivées partielles . L. Vuibert 63 Paris (1972).
- [27] Watson, G. M. - A treatise on the theory of Bessel functions. Canbridge Uni. Press. Canbridge.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día
de la fecha, acuerdo con la presente Tesis
Doctoral con la censura de ~~APTO CUM LAUDE~~

Madrid, 16 de junio de 1988

Alfred Boer
[Signature] *[Signature]* *[Signature]*
[Signature]